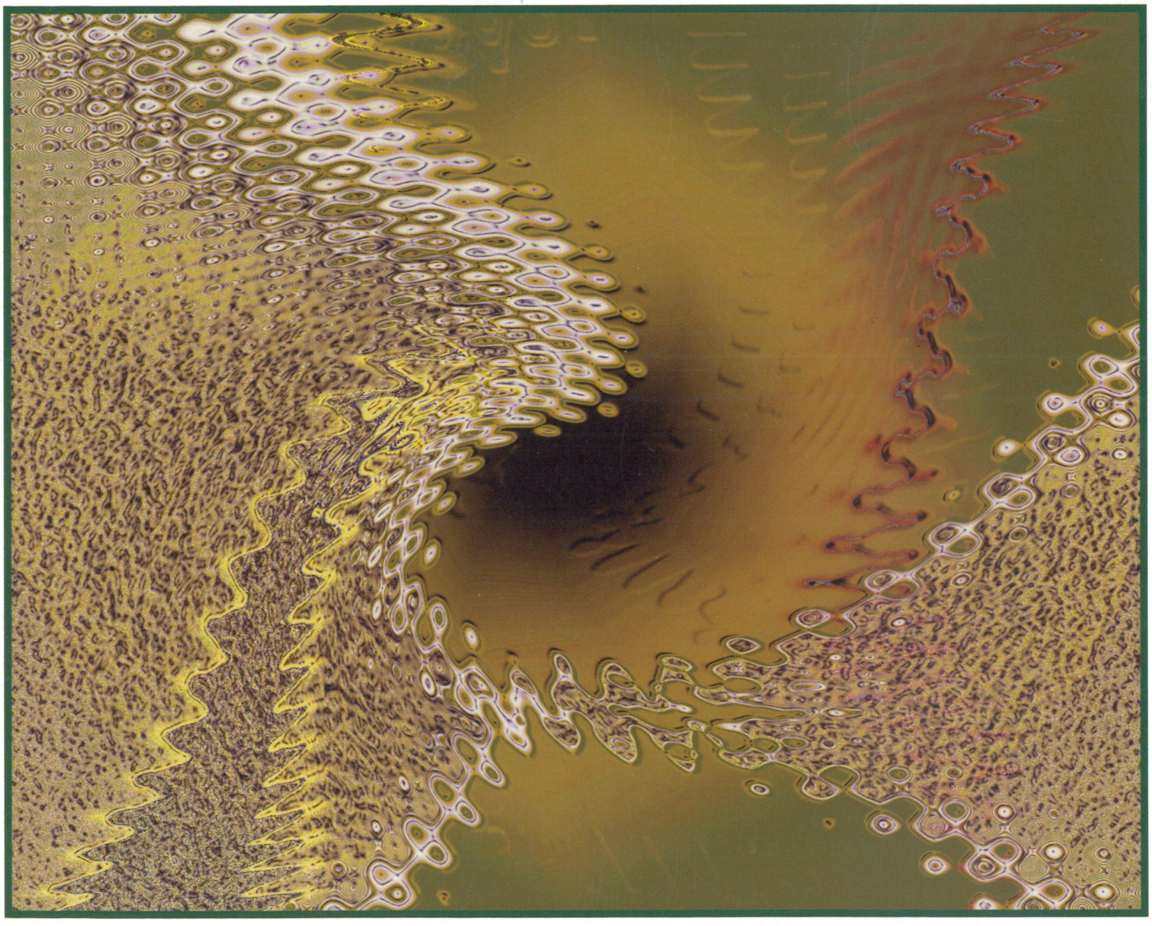
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2008年5月1日発行　第46巻5号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

5
2008

特集

物理と数学の難所
理解を深めるキーポイント



No.539

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 539 May 2008

物理と数学の難所

理解を深めるキーポイント

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は1年間(本誌のみ) 11,000円，1年間(本誌＋別冊2冊) 14,500円，半年間(本誌のみ) 5,500円，半年間(本誌＋別冊1冊) 7,250円です．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63年/7～2005年/9 省略
2005年/10 不確定性原理の新展開
別冊　スーパーストリング
/11 0の発見
/12 現代代数学への誘い
2006年/1 偶然から必然へ
/2 物理法則の直観的理解
/3 〈強い力〉
/4 「空間」とは何か
別冊　量子の新世紀
/5 数学と物理の対話
/6 発見とひらめき
/7 重力は語る
/8 ネットワーク科学の数理
/9 ランダムネス
/10 ツイスター理論の拡がり
別冊　場の量子論の拡がり
/11 固有値問題のひろがり
/12 素粒子像の探究
2007年/1 ヤング図形で遊ぶ物理と数学
/2 ランダム行列の広がり
/3 現代物理における超対称性
/4 現代数学はいかに使われているか［代数編］
別冊　双対性の世界
/5 数学の直観的理解
/6 物理における位相の世界
/7 代数的物理観
/8 数学における場の量子論
/9 ディラック
/10 フーリエ解析の力
別冊　素粒子物理学の発展
/11〈電弱統一理論〉
/12「時空」への問いかけ
2008年/1 現象を視る
/2 ゲージ重力対応
/3 現代物理のための数学キーワード
/4 現代数学はいかに使われているか［解析編］
別冊　多様体の広がり

数理科学臨時別冊一覧

07年/1 ゲノム進化を考える
07年/3 非平衡統計力学
07年/5 超幾何関数入門
07年/6 相対性理論
07年/7 3次元トポロジーの新展開
07年/9 数理･情報系のための整数論講義
07年/11 コンピュータ将棋の頭脳
07年/12 計算神経科学への招待
08年/1 演習 くり込み群
08年/3 熱方程式で学ぶ逆問題

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店(新宿)
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店(立川)
くまざわ書店本店(八王子)
くまざわ書店桜ヶ丘店(多摩)
書泉グランデ(神田)
書泉ブックタワー(秋葉原)
三省堂本店(神田)
ブックファースト渋谷店
リブロ池袋店
ジュンク堂書店(池袋)
ジュンク堂書店(新宿)
芳林堂(高田馬場)
八重洲ブックセンター(東京駅前)
丸善丸の内本店(東京駅前)
ブックファースト青葉台店(横浜)
栄松堂ジョイナス店(横浜)
有隣堂イセザキ町店(横浜)
有隣堂西口・東口(横浜)
有隣堂厚木店(厚木)
文教堂ブックセンター(川崎)
旭屋船橋店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店(大阪)
旭屋本店(大阪)
アバンティブックセンター(京都)
ジュンク堂書店(京都)
ジュンク堂書店(神戸)
ジュンク堂三宮駅前店(神戸)
ジュンク堂書店(大分)
喜久屋書店倉敷店
紀伊國屋書店松山店
紀伊國屋書店福岡店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
紀伊國屋書店新潟店
旭屋札幌店
金港堂(仙台)
金港堂パーク店(仙台)
ジュンク堂書店(仙台)
鹿島ブックセンター(いわき)
友朋堂(つくば)

——大学生協・売店——

東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
電気通信大学・福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店

May 2008 MATHEMATICAL SCIENCES Number 539

対談：物理と数学の難所

米谷 民明・河東 泰之

自然科学の歴史を見ても，物理と数学ほど互いに密接な影響を及ぼし合いながら進歩した学問はありません．ガリレオ・ガリレイは「宇宙という書物は数学の言葉で書かれている」と言っていますが，物理と数学の対話は，長い時を経ながら，残された宇宙の謎を一つずつひもといてきました．この解かれてきた謎の中には，未だに理解するのに困難とされる壁があります．

今回の特集では，物理と数学を学ぶ上で理解に苦しむ概念や，古今を問わず初学者にとって壁とされる話などを取り上げ，そうした“難所”や“壁”を乗り越えるにはどうしたらよいのか，先生方はどうやってその壁を越えてきたのか，様々な例やトピック，エピソードなどを提示していただきました．

そこでこの巻頭では，物理と数学を代表して，米谷民明先生（東京大学大学院総合文化研究科）と河東泰之先生（東京大学大学院数理科学研究科）のお二人に，物理と数学をめぐる難所について縦横無尽に語り合っていただきました．　（編集部）

1. 初めての難所とは――苦悩の共通点

編集部：今回は新入生向けの特集なのですが，初学者や入門者が大学で物理と数学を学ぶ際に，最初に体験する苦悩の共通点として挙げられることは何でしょうか．

河東：数学はまず一番最初に，抽象的なものに触れる，ということに非常にギャップを感じると思いますね．伝統的なカリキュラムで言えば大学に入ってすぐの所から抽象的な証明が始まりますし，先生や大学によっては後になってから来ることもありますけれど，ひたすら定理と証明が続くというのは，初めて触れたときは困りますよね．そのまま嫌いになってしまう場合もありますし….

米谷：そうですね，最初に感じるショックというのはあるでしょうね．数学が好きだと思って入ってみたけれど，想像していたこととは全然違うようなことをしている，というショックですよね．

河東：東大では入ったときは学科がまだ決まっていませんから，授業する前には数学科に行きたいという人はたくさんいるんですが，ちょっと授業が始まると激減しますね（笑）．

米谷：物理のほうで言いますと，物理志望の人はけっこう多いんですが，最近の傾向として，例えば力学だと，本格的な法則などの話に入る前に，準備としてベクトルや線形代数の復習のような必要な数学の知識を私の授業ではまず話します．その辺りの話は比較的よく理解してもらえるのですが，段々授業が進むに連れて，その後の物理への応用などに結びつきができなくなるというケースが多



米谷民明氏.

いですね．数学だけの話ならば理解できるのだけれども，それが物理の法則とどう結びついて，どう使うかという所になると非常にとまどう人が多いようですね．

河東：それは，数学と物理が高校までで切り離されてしまっている問題もあるのでしょうね．

米谷：そうですね．微分積分と物理は関係がないような形で高校では習っているということもあるのでしょう．それぞれ何か違うといった思い込みのようなものがあるのか，その辺りでつまずきが出てきてしまうようです．むしろ「これは面白い」と思って入ってきてもらえるように，教える側は期待しているのですがなかなか難しいですね．物理のほうの最初の難所（つまずき）というのはその辺りのようです．そこを乗り越えるとかなり面白くなるのですが….

編集部：弊社でも「はじめて学ぶ物理学」（全巻 阿部龍蔵著）というライブラリを刊行しているのですが，それは今お話しされたような高校の履修状況に合わせて，微分積分を使わずに物理を解説して頂いています．本特集でも物理と数学とそれぞれに分けて記事を展開していますが，両者の関係を切り離さずに互いの利点をうまく活かしていただければいいですね．

河東：先ほど話したように，抽象的な数学にギャップを感じることの上に，真面目に勉強していくとなかなか進まないことも多いわけですが，一方で物理や化学のほうでは，微分積分でもベクトル解析でも数学で習うより先にどんどん使っていきますから，その辺りのとまどいも多いのではないでしょうか．

米谷：そのとまどいも多いでしょうね．数学でまだやっていないことをどうして使うんだと，抗議をされてしまうんですね（笑）．それは結局，物理にとっての数学と，数学にとっての数学，にはかなり違いがあるということを反映しているのです．

編集部：それぞれの教育カリキュラムの中で，そうした矛盾もあるわけですね．

米谷：そうですね．これ以外で言うと，例えば本特集で和達先生も書いていることですが，式自体は自分でわかったつもりでいて計算ができても意味がわからない，というケースも物理には非常に多いんですね．数学にしても物理にしても，概念的に捉える，ということはいずれにしても必要でしょう．意味を考えるということはやはり大切です．

2. 難所から広がる道――進路の選択

編集部：そうしますと，数学と物理の授業をそれぞれ受けていく中でいろいろな矛盾を感じながら，むしろその中で自分の進路を考えていくということになるのでしょうか．

米谷：そうですね．中村先生の記事にもありますが，例えば量子力学を勉強しているうちに教科書に書かれてあることに自分で納得ができない，という所から本格的な道に進んでいくということも多いと思います．とくに数学者の方はそういった例が多いように感じます．

ある数学者の方の話ですが，東大駒場の物理の授業で振り子の運動の話を聴講したときに，振り子の振動の方程式がちゃんとあるのにどうしてちゃんと解かないんだ，と物足りなく思われたそうです．

物理では法則を表すための道具として数学を使いますから，物理として大切なキーポイントを理解することが大事で，あまり厳密に追究しすぎな

いことも授業では必要だと思います．実際に振り子の方程式を調和振動子の近似によらずにきちんと解くとなると，楕円関数まで出てきて非常に大変ですから．

河東：高校までの数学は大体は形式論できちんとやれるので，そういうことに慣れてしまうと，大学に入ってから物理や化学で何だかインチキしているんじゃないかと感じる方もいるようですね．

米谷：1,2 年生だけでなく専門学部での授業でもそうなのですが，割とできる人の質問は，内容が厳密でないのではないか，といった質問が多いですね．

編集部：先生方ご自身が進路を選択した動機などをお聞かせいただけますか．

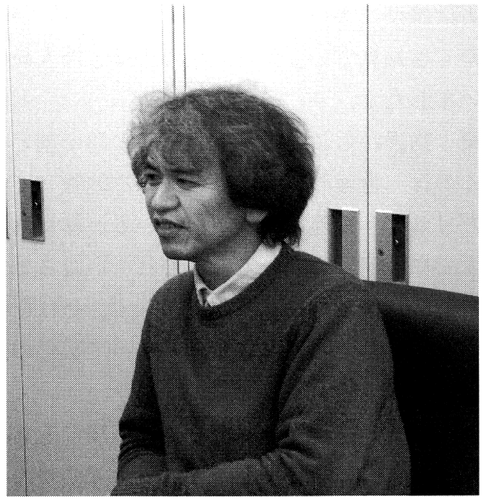
河東：私の場合は全く迷わずに数学に進むことを決めましたが，今は数理物理を研究している，などと言っているのが多少後ろめたい気もします．完全に理論的に整然とされた枠組みの中でやれる，ということが好きでしたので，あまり自然現象を記述することには興味はなかったですから．物理に進んだ昔の同級生からは，「じゃあ，どうして今は数理物理をやっているんだ」などとも言われましたけど (笑)．私の周りには途中まで物理に行っていた人もたくさんいますし，研究室の学生でも物理出身の人もいますね．

編集部：その進路のご決断は大学に入る前からですか．

河東：ええ，ずっと前から必ず数学に行こうと決めていました．

米谷：私の場合は，実は数学に行こうかなと迷ったこともないわけではないんですね．アインシュタインにも憧れていましたので，それには数学を勉強する必要があることも分かっていましたし，そういう意味では，最初は数学に入れ込んだのでそのまま数学のほうに進む可能性もあるかなと思っていたんです．

しかし，これは河東先生と正反対になりますが，法則自体を数学で表せる，ということに非常に興味を覚えましたので，むしろ未知の自然法則を数学でどんなふうに表したらいいのか，という今の仕事にそれがつながっていったと思います．



河東泰之氏．

法則を見つけるという段階では細かくきっちり定義をする必要はなく，むしろそれをやりすぎたらかえって新しいものを見つけられませんから，何かもやもやとした所で数学と物理を結びつけるということに興味があって，それで理論物理の道に進みましたね．

数学でも代数学や解析学などいろいろかじってみて大分勉強してみましたが，何かちょっと抽象的すぎると感じました．もっと自然現象と物理法則がどうつながっていくのか，ということを深く理解したいという思いがやはりありました．

河東さんも私も割と早い段階で進路を決めることができたわけですが，場合によっては非常に迷ってしまってどっちつかずの状態になってしまうケースもありますね．

河東：物理から数学に変わる人はかなりいますが，反対はあまりいないですよね．

米谷：そうですね．ちょうどこの間佐藤幹夫先生の本を読んで非常に面白かったのですが，佐藤先生も本来数学者なんだけれども，物理にも興味を強く持っておられ，物理の大学院にも入り直したりしているのですね．だからといって物理学者になったわけではありませんでしたし，むしろ物理で学んだことが非常に数学に活きたとおっしゃっています．ですから，数学から物理に変わるとい

う方は確かに少ないでしょうね．その逆という人はたくさん見ていますし，私の指導した人の中でもいましたよ．

河東：物理から数学に移る人たちの間で割とよく聞くのは，物理のつもりでいろいろ勉強していたんだけれど，物理ではわかっていると言われていてすでに証明されていると言われていたことが実は数学的にまだはっきりしておらず，それをもっと明らかにしたいと思うようになって数学の道に転向されているようですね．

米谷：数学を道具として使っている間に道具自体に魅せられてしまう，というケースですね．

編集部：気がついたら引き込まれていた…というような，不確定な要素もあるわけですね．先生方は進路のご決断は比較的早めのようですが，ご自身の進路に進まれてから最初に感じた難所はどんなものでしたか．

米谷：1年生の頃に自分で勉強していて，私が最初に難しいなと感じたのはベクトル解析でしたね．マクスウェル方程式を理解するにはベクトル解析を学ばなければならないのですが，どうも最初に記号に違和感を感じました．本を読んで計算をしてもそのとおり追ってゆくことはできるんですが，rot (rotation) や div (divergence) といった概念など自分で本当に分かったという気がしませんでした．でも一度わかってしまうとその美しさに魅了されるようになりました．

河東：私は抽象的な数学は昔から好きでしたから最初のうちはそれほどありませんでしたが，もっと先に進んでから突き当たった研究の壁はありましたね．

編集部：最初に勉強したときに感じた難所でも，時間が経つに連れて理解できてくるようなものもあると思うのですが，学部で学ぶ範囲の中ではあるでしょうか．

米谷：そうですね．例えばよく聞かされたのは，熱力学というのはただ聞いただけでは分からないもので，教えて初めて分かるものだと言われましたね．確かにこれはある程度真実を突いていて，自分で実際の現象と突き合わせながら，人に教えてみたりして追体験することで本当に理解できるということだと思います．教科書で勉強した後にも，やはり自分で考えて，組み立て直してみることが大切だと思います．

河東：数学では，例えば線形代数で言うと，計算すればこうなりました，というだけでは本当の意味は分からないと思いますね．行列なども，ただ数が並んでいてそれを操作するだけだと思うと何も問題はないですが，抽象的に線形代数をやるとそれはやはり難しいですよね．

編集部：先ほど，数学を道具として使っているうちに道具そのものに引き込まれて…という話がありましたが，難所や壁に当たることで逆に本人にとっての本当の進路がひらける，ということがあるのでは，と思いましたが….

米谷：むしろそれが本当だと思いますね．必ずある種何かの難所があって，それを乗り越えながら理解が進展して，自分の本当のやりたいことがわかってくるということだと思います．

河東：そうですね．本当に面白いことが見えてくるんだと思います．数学をやるつもりなんて全くなかったのに，何だか難しいことをやっているなあと思っているうちに，知らない間にこんな世界があったのかと目覚めて好きになっていく，という方もいらっしゃいますね．

米谷：例えば医者になりたくて東大の理 III に入った人が，いろいろ勉強しているうちに実は物理のほうが面白いことがわかって方向転換したり，生命科学系が好きで入ったけれど，物理の基本法則のほうが面白く感じて進路を変えたり，とその広がり方は多様だと思います．

3. 基本概念に潜む専門的難所
——難所への気づき

編集部：今回の特集記事をご覧いただいて，全体的に見えてくる専門的な難所についてはいかがでしょうか．

米谷：そうですね．古典物理や熱力学，量子力学



に関しては学部の段階のものが多いと思いますが，素粒子や弦理論になると学部ではほとんどやらない少し専門的な内容になりますし，熱力学でも専門的な所につながる難所もあるでしょうね．量子力学もその数学的形式だけではなく，物理的解釈と関連するような話になると，かなり専門的な難所が出てくると思います．

河東：数学も，それぞれの分野において長年の努力によってうまくいくことが分かっていることの中にも，なんでこんなことをすればいいのかわからない，といった問題は至る所にありますね．しかしそれ以前に，多くの人はもっと前の段階で越えなければならない難所がいっぱいあるはずなんですね．論理的なことをもっとつめ切れていないケースが圧倒的に多いんです．論理のレベルで，どうすればちゃんと分かったことになるのか，ということが分かっていないのだと思います．

米谷：難所を越える越え方を自分なりに積み重ねて来ていない，ということでしょうね．

河東：そうですね．難所であることが分かっていない，自分がそれを越えていないことに気付いていない，難所に気が付かない，ということですね．

編集部：なるほど，和達先生の記事で引用されてある論語にも，自分が理解していないことを知る，ということが説かれていますが，専門的な難所も，終局においては自身の理解の深め方につながっていく，というわけですね．

河東：実際にそうした難所をごまかしていても，ある程度試験などは通っていけるという現実もありますし….

米谷：そうですね．入試などでもそういった側面は散見されますね．だから，それでずっといいと思って来てしまうと，難所というものに気がつかないままに終わってしまう場合が結構ありますよね．

河東：短期的に試験だけをクリアすることを考えるなら，むしろ難所は避けていったほうがいいという場合もあるでしょう（笑）．

編集部：そうしますと，むしろこの特集を通して，そういった“気づくべき難所”というものを理解していけるといいわけですね．

米谷：研究の上での難所というより，普段勉強している話の中に実はそういう問題が潜んでいるんだ，ということを認識してもらえればいいのではないかと思います．

4. 理解を深める読書のすすめ

編集部：難所を越えるにあたって，本の選び方やお薦めの名著などございましたら，ぜひご紹介いただければと思います．

米谷：いろいろ難しい本もありますが，何でも挑戦

してみるということも大切だと思います．例えば物理で言うと，ランダウ・リフシッツの本（理論物理学教程シリーズ）は昔から定評のある名著ですね．ちょっとかっこよすぎて誤魔化されてしまうような所もあるのですが，『力学』は特に影響された人が多いと思います．ファインマンの本（ファインマン物理学シリーズ）は，それに比べると正直に書かれている歴史的名著です．

和書では，寺沢寛一の本（『自然科学者のための数学概論』）は数学的な方法に関しては本当に充実していて，今もあれに匹敵するものはないと思いますね．

河東：数学ではもちろん有名な本はたくさんありますが，学生の向き不向きもあるでしょうから，やはりいろいろな本を手にとってみることがいいと思います．とくにどれがいいというものはありませんが，ただ洋書を早くから読まれることを薦めますね．

米谷：そうですね．先ほど挙げたファインマンについても同様のことが言えますね．原文で読まれることをこれもお薦めします．

編集部：洋書を読むということに学部のうちから隔たっていることで，逆に院のほうにあがるに連れて急にそういったものにぶつかってとまどってしまう，というケースもあるのかもしれませんね．

河東：洋書のほうが種類はたくさんありますし，数学書の英語は簡単に書かれていますので，学部の1,2 年生ならば十分読めると思います．たとえ変な本にぶつかったとしても，それはそれでいい経験になると思います（笑）．

編集部：本日は貴重なお話をお聞かせ下さり，誠にありがとうございました．

（2007 年 12 月，千駄ヶ谷サイエンスビルにて）

（よねや・たみあき，東京大学大学院総合文化研究科）
（かわひがし・やすゆき，東京大学大学院数理科学研究科）

教養物理の難所

非物理系の学生の皆さんへ



市村 宗武

1. はじめに

編集部よりご依頼を受けた仮題は「古典物理の難所」というものでしたが，私には現代における古典物理学が内含する課題とか難題というものを解説する見識は持ち合わせません．私は現在情報科学部という物理や数学を専門としない学生たちに物理と数学を教えており，かつては生命系や経営工学の学生たちにも物理を教えていましたので，現在最も関心があるのは物理や数学を将来専門的に利用することの少ない生命系から文理の中間に属する学生たちへの物理や数学の教育です．この立場で（本誌の読者層の皆様の関心とずれるかもしれませんが）日頃気にしていることを少々述べさせていただきます．そこで表題を旧来（1990年代前半まで）の大学教育における教養部ないし一般教養の名を引きずって「教養物理の難所」と題しました．大学の教養物理を教えておられる先生方を意識しながら，おもに大学1, 2年の学生諸君に話し掛けたいと思います．

2. 楽しさを教えることはできるか？

私たち物理学科同期卒の仲間は同窓会などの連絡をe-mailで取り合っていますが，そこで時に議論が巻き起こることがあります．私が近況として「リメディアル教育[*1)]を始めることとなり，そこに参加する学生がコンプレックスを感ずることなく如何に楽しくやれるか腐心している」と書いたところ，A君が「自分も今度同様の教育に携わることとなった．数学や物理の面白さを伝えるには相手が何者であっても変わらないと思い楽しみにしている」と書いてくれました．すると直ちにB君から「数学・物理の楽しさを教えるなどという甘い考えは成功しない．楽しさは教えられません．楽しさは自分の成功体験から生まれるものだと思います．基礎を教えれば応用が利くというのも自然科学の後進国の教育観だと思います.」という反応があり，続けてC君からB君の意見に賛成し「学生時代の勉強はやはり苦しさが先にたちましたが，それでも頑張り続けた原動力は知に対する渇望と憧憬だった.」という意見も出てきました．物理学科，数学科の教育に携わる方々には，当然後者の考えの方が多いと思います．本特集を企画された方々も，このような物理や数学を目指す人々の直面する「難所」を考えられてのことと思います．ただ，これらの意見は私の直面している現実とは別世界のものとして，多少の違和感と大いなる羨望の思いに駆られました．私の言った「楽しむ」とは，せめて拒絶感なく数学や物理に接すること，数学や物理を使って物事を考えることの「楽しみ」でした．私は上記「リメディアル教育」の一環としての高校数学の補習も担当しており，基本的問題を丁寧な指導付きで解かせていますが，そ

*1） 基礎学力不足で大学の授業についていけない学生に対する学力向上をはかる特別授業．

れでも「初めて自力で問題を解くことができたのは大変うれしかった」との感想を授業評価で書いた学生もいました．「楽しむ」ことはレベル，レベルに応じてそれぞれあるのだと思います．

そこで本稿では，近年非常に多い高校で物理を学ばないで大学の情報系や生命系に進学してきたような学生諸君（最近では工学系でもこうした学生が増えています）を念頭において，私の経験の範囲で知り得た，彼らの直面する「難所」について考えたいと思います．

ただ，若い人たちも，専門家レベルの人たちは物理を学ぶに当たって上記のＢ君やＣ君のような姿勢を持っていること（私も共感）も知っていてほしいと思います．

3. みんな必ず落ちこぼれる

数年前，放送大学20周年の記念講演で石井紫郎氏（元東京大学法学部長，副学長，元総合科学技術会議議員）が，確か「何のために勉強するか」というようなテーマで大変示唆に富んだ話をされました．そこで「数学や物理のような積み上げ方式で学んでいかなければならない学問では，論理的に遅かれ早かれ皆必ずどこかで落ちこぼれていくものだ」という趣旨のことを述べられ，冗談めかして「落ちこぼれなかった人だけが数学者や物理学者になっているのだろう．」と話されたように記憶しております（大分前の話なので私の自己流解釈が多分に含まれているかもしれません）．これはまさに至言と思います．また問題なのはハードルを越えた人には，越えられなかった人がどんな所で躓いたか全く理解できないことが多いことです．学生の質問などで「えっ，そんなこと考えていたの！」と驚かされることがしばしばです．教育に当たるものとしては，これをどう見つけるかが重要な問題と思います．多くの先生方がやっておられることと思いますが，私は出席をとる代わりにミニテストと称して授業内容についての極めて簡単な基礎問題を最後の10～15分で解いてもらっています．試験ではなく友達との相談もOKです．これは大変有効で学生の躓くところなど多くのことを教えてくれます．東大で教えていた頃はこうした配慮を全くせずどんどん先に進んでいたことを今では申し訳なく思っています．

ちょっと先生向けの話になりましたが，若い学生読者諸君，先生方（私もその典型）は熱意を持って，しかし君たちが何が分らないかを分らずに授業を進めているのです．どんどん質問してその点を気づかせてあげましょう．授業中手を挙げるのが恥ずかしかったら授業終了後個人的に聞くことをお勧めします．どんなにつまらない質問と思っても，それは落ちこぼれ防止の非常に有効な方法であり，先生にとっても授業改善の重要な情報であり，また同じようなところで躓いている多くの友人のためでもあります．

もう一つ，完全には分らなくてもおおよそ把握できたら立ち止まらないで先に進みましょう．折に触れて振り返って考えればよいのです．物理では最初から完全に分るということは有り得ません．ひょっとしたらその問題は専門家もまだ分っていないことかもしれません．これは落ちこぼれではありません．また，みんなどこかで落ちこぼれるのだと思えば気が楽になりませんか？

さて，この落ちこぼれポイントが本企画の「難所」に当たるという解釈で，私の限られた経験の中から幾つかの例を挙げていきたいと思います．

4. 第1のそして最大の難所

第1のそして最大の難所はモティベイションの問題だと思います．理系の学部では生命系も含めて物理がある程度必修になっているところが多いのではないでしょうか．そのとき「物理は面白い」とか「物理は難しいけど興味があって勉強しよう」とか「自分の専門に直接関係ないけど勉強しておかなければ」と思っている学生はどのくらいいるでしょうか．学生による授業評価アンケートで，私の必修の物理の授業について「積極的に取り組んだ（取り組まなかった）理由」という自由記述の設問に対し，出席理由として「必修だから」，「毎回

ミニテストで出席を取られるから」,「単位が欲しいから」が圧倒的に多く,「物理は情報科学にとって必要だから，役立つから」や「物理が好きだから，面白いから」は少数派です．しかし，少数派ながらこうした人たちがいることをうれしく思っています．取り組まなかった理由は「難し過ぎる」が圧倒的に多いのですが，それを受けて易しくし過ぎた年は「内容が高校と同じ」との批判に遭いレベル設定の難しさを感じています．これからも窺えるように物理系以外の学生にとって物理の受講は強制されてのものという面が強く，勉学意欲の有無が第1の難所に思えます．

私はかつて物理を学ぶ動機付けの一助として，上記必修の物理の第1章は「物理を学ぶ」と題して，物理を学ぶ意義，動機，物理小史とこの授業で学ぶニュートン力学の位置付け，現代最先端物理の匂いなどに触れることにしていました．意義の第1には「知的好奇心」を人間に備わる普遍的価値観として挙げていましたが，これは学生にとっては内発的心情の世界のようで，天下り的に話して意味があるか迷っています．また「論理的思考を身につける非常によい場」とも話しましたが，まだ実感が伴わないレベルのようで，最近はこの章をやめて直ぐに物理本題に入ることにしてしまいました．皆さんどうお考えでしょうか．

昨年，経済協力開発機構（OECD）の国際学習到達度調査（PISA）の結果がマスコミを賑わせました．我が国は「科学についての本を読むことが好き」,「科学に関するテレビ番組を見る，雑誌や新聞記事を読む」は参加57カ国・地域中最下位とのことです．我が国では物理は「知的好奇心」の対象になかなか入れてもらえないようです．幼児時代の「なぜ，なぜ？」には物理の質問が多いのですが….何故こうなってしまったのでしょうか．

先に触れたミニテストの第1回では，アリストテレスからニュートン，…，アインシュタイン，湯川と人名を挙げ,「これらの名を聞いたことがあるか，知っていれば何をした人かを記せ」というアンケートを毎年してきました．さすがニュートン，アインシュタインは満票に近くガリレオがそれに続くのですが，ボーアになると半数少々，マックスウェルとなるとほんの少数です．何をした人となると，コペルニクスが天動説との回答が相当数にのぼり，アリストテレスが「それでも地球は回る」でガリレオが「天動説」などという珍解答も続出し楽しませて（悲しませて）もらいました．アインシュタインについて「原爆」という回答がかなりあったのは“物理の眼”でなく“社会の眼”ということでいい勉強になりました．コペルニクス的転回という言葉は死語になったのならまだしも，誤用されたら大変ですね．高校世界史で名前とさわりだけ聞いて受験用に暗記しただけで知識として定着せず混乱をきたしているのでしょう．子供向け偉人伝から入ってでも，文化史，科学史的素養，関心があると物理に対する興味の持ち方もまた違ってくるのではないかと思うのですが，10代後半までにそれを望むのは無理でしょうか．

表題とした教養物理には，積み上げ方式で学んでいく学問に特徴的な，専門（分野を問わず）のための基礎教育という側面と，科学・技術の時代と言われる現代，社会人として科学的思考をもって社会の諸問題を判断，対応していける素養を身につけるという二面があると思います．基礎教育の側面を強く要求される理系学部においては，物理はある程度必修として強制されるべきかと思います．学生諸君は「自分の分野では将来物理など使うこともないのに」と思わず，それが大学の親心と思い，この「難所」を乗り越えてしっかり勉強し，願わくば物理が面白いと思うようになってほしいと思います．

さて以下では，大学1, 2年の物理で出会う多くの難所の中の2, 3の具体例に触れましょう．

5. 運動方程式は微分方程式

高校と大学の物理でまず違うところは，大学では微分や積分をどんどん使うことです．高校では運動方程式，質量 × 加速度 = 力を

$$ma = F$$

と書きます．加速度 a は時間の関数であり，力 F は時間や位置の関数なのですが，それを意識することが少なく，ある数値と思っている人も多いようです．

大学では時間を t，位置を座標 x で表して

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F$$

と書きます．力が場所による具体例としてバネの力を考えると $F=-kx$（k は定数），これを上式に代入して整理すると，$\omega=\sqrt{k/m}$ とおいて

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0 \qquad (1)$$

となります．これは時間 t の関数 $x=x(t)$ に対する方程式で，微分を含むので**微分方程式**と呼ばれます．式 (1) の場合，解は単振動を表すので単振動の方程式と呼ばれます．

高校までは方程式と言うと，2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

の解は公式○○で与えられると暗記したように，x は数値です．ところが微分方程式 (1) では<u>解は関数</u>なのです．この点が多くの学生にとってかなりの「難所」となっているようです．

さらに厄介なのは方程式 (1) だけでは答はユニークには決まらない，決まるのは一般解と呼ばれる一群の関数の集合だということです．方程式 (1) の例で言うと一般解は

$$x=A\sin\omega t+B\cos\omega t,\ (A,B\text{ は任意の実数}) \qquad (2)$$

です．問題に対応する答を求めるにはさらなる条件が必要です．通常現れるのが初期条件（ある時刻での位置と速度）です．教科書によって，初期条件を順次使って一般解を使わない解法，一般解をまず出してから上の任意定数 A, B を求める解法など色々ですが，要するに“運動方程式は位置を時間の関数として求める微分方程式で，答を求めるには方程式だけでなく初めの位置と速度の情報も必要”ということを認識して下さい．それで概念的な迷路に入ることは避けられるのではないでしょうか．解くプロセスの難しさは別ですが，それは例題を解いて乗り越えてください．

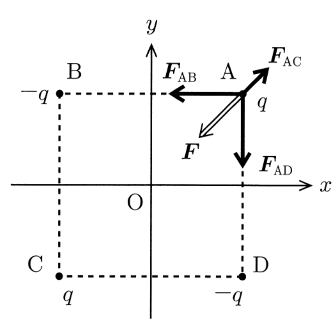
私は密かに「高校で物理を習わなかった者は幸いなるかな」と思っています．学習指導要領で制限され微分が使えない高校物理の一ひねりした説明より，大学で微分を使った論理展開のほうがすっきり入っていけると思うからです．もちろん，高校数学はしっかり学んでいるとの前提ですが．

6. ベクトルで表される量

ベクトルという概念は高校の数学Ｂで十分学んだはずですし，高校物理でも使われています．日常会話ですら「A に行きたいベクトルと B に行きたいベクトルが心の中で葛藤し」などと使われ，皆おぼろげな概念はもっています．しかし，ベクトルを使って物理の問題を考えることは定着していなくて，一つの難所になっているようです．

私の経験した最も初等的レベルの誤りから始めましょう．先に述べたミニテストで「一辺 a の正方形 ABCD の頂点 A, C に電荷 q，B, D に $-q$ を固定した．B, C, D にある各電荷が A の電荷に及ぼす力はそれぞれ幾らか」という問いにはほとんどの人が正解を出すのですが，「B, C, D の電荷全体でどれだけの力を A に及ぼすか」と聞くと，3 つの力を向きを考えずに単に足したり，向きを正しく表現できず 4 割方アウトになります（図 1）．そこで次の週，説明し直すというはめになります．

大学教科書でクーロン力は



$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_{AB}+\boldsymbol{F}_{AC}+\boldsymbol{F}_{AD}$,
$\boldsymbol{F}_{AX}$：X が A に及ぼす力

図 1　点 A の電荷にはたらく力．

$$\boldsymbol{F} = k_0 \frac{qq'}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

という公式が書いてあり，授業でも結構時間を取って説明するのですが，学生にはベクトルが頭の中で熟してなく $\boldsymbol{r}/r$ という表現などなかなか使いこなせません．まず間違い，それから考え直してもらっています．私の模範解答もまず成分ごとにわけて考えるという方式です．長い人類の歴史の中で座標（成分）で考えるようになってまだ400年ほど，数ベクトルや矢印ベクトルは使い出して200年にもならない大発見ですから無理もないことかもしれません．これも分っている人にとっては当たり前で，何故分らないのか分らない例の一つです．

みんなが戸惑うハードルはベクトルの微分です．$d\boldsymbol{r}/dt$ さらに $d^2\boldsymbol{r}/dt^2$ を直ちにイメージできるようになるには，繰り返し図を描いて慣れることを必要とします．

次に少し高いレベルの難所として次の典型的な誤りの例を述べます．位置エネルギー

$$V(r) = k_0 \frac{qq'}{r}, \quad (r = \sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

が与えられたとき力を求める問題で

$$\boldsymbol{F} = -\mathrm{grad}V(r) = k_0 \frac{qq'}{r^2}\frac{x+y+z}{r} \qquad (3)$$

という誤答です．東大においてもこの答には非常に頻繁にお目にかかりました．左辺はベクトルなのに，右辺はベクトルではないですよね．でもこれがベクトルに見えてしまうのでしょうか．

$$\mathrm{grad} = \nabla = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \qquad (4)$$

の意味を理解するところに大きなバリアーが厳然とあります．ここで $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ は x, y, z 軸方向の単位ベクトルです．この表示を取らず成分表示だけで済ませておけばバリアーは随分低くなるので，そこで満足しても構いません．ですが，それではベクトル表示の意義が随分薄れてしまうのです．

この問題と絡めて，ベクトルの基本事項を少し解説させてください．簡単のため平面で考えます．原点Oを決め点Pの位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ とします．一つの座標系 O_{xy} を決めると点Pの座標 (x, y) が

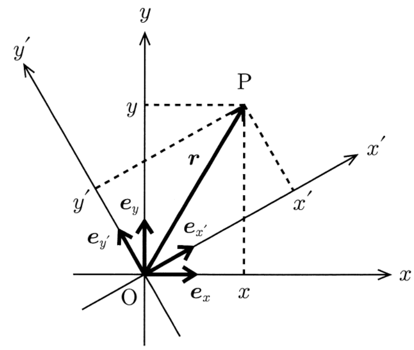


図 2　座標は座標系と対．

決まります．x, y 軸方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y$ として

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y$$

です．別の座標系，例えば上の座標系を30° 回転した座標系 $\mathrm{O}_{x'y'}$ をとると点Pの座標は (x', y') となります．x', y' 軸方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_{x'}, \boldsymbol{e}_{y'}$ として

$$\boldsymbol{r} = x'\boldsymbol{e}_{x'} + y'\boldsymbol{e}_{y'}$$

です（図 2）．よって

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y = x'\boldsymbol{e}_{x'} + y'\boldsymbol{e}_{y'} \qquad (5)$$

が成り立ちます．しかし，多くの教科書では（座標系 O_{xy} をとった場合）$\boldsymbol{r} = (x, y)$ と書かれています．すると座標系 $\mathrm{O}_{x'y'}$ をとった場合は $\boldsymbol{r} = (x', y')$ と書くことになり

$$\boldsymbol{r} = (x, y) = (x', y')$$

というとんでもない結論を出しそうです．図 2 からわかるように $(x, y) = (x', y')$ であるはずはありません．これは教科書が舌足らずで，“座標系を決めて与えられる位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の座標のなす数ベクトルを $\boldsymbol{r} = (x, y)$ と書く” と丁寧に規定しておくべきでしょう．混乱を避けるには $\boldsymbol{r}$ でなく別の記号を用いるほうが望ましいです．

お分かりのようにベクトル $\boldsymbol{r}$ は座標 (x, y) だけでなく座標軸の向き $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y$（線形代数学で**基底**と言う）のセットで表現されるのです．ですから式 (5) が成り立ち，一々座標系を決めないで $\boldsymbol{r}$ だけで

論理を展開しても大丈夫で，必要なときだけ基底を導入して座標で表現すればよいのです．ちょっと飛躍しますが，これで式 (3) がどんな誤りを犯しているかと，式 (4) で grad だけで式を展開していくことの有利さをおぼろげにでも理解して頂けたでしょうか．

少し高度な話を付け加えます．高校の数学 B や物理で習った皆さんの知っているベクトルは 3 次元空間での向きと大きさをもつ量（空間ベクトル）ですが，線形代数学ではこのベクトルの概念を一般化，抽象化して，空間ベクトルと同じ足し算とスカラー倍のルールを満足する同種の量の全体を**線形空間**と言い，その元をベクトルと呼びます．この抽象化では，例えば連続関数全体も線形空間をなします．式 (2) で表される単振動の方程式の一般解全体も一つの線形空間をなし，式 (2) の解はこの空間に属する一つのベクトルです．この空間に基底 $\{\sin\omega t, \cos\omega t\}$ を導入すると，(A, B) がその座標です．量子力学では状態ベクトルというものが出てきて，それ全体のなす線形空間が中心的な役割を果たします．さらに線形空間から線形空間への線形写像という，比例関係の拡張（抽象化）を理解すれば量子力学もバッチリです．ぜひ線形代数学をしっかり勉強してください．逆に線形代数の抽象化，形式化に戸惑う人にとって物理は線形空間や線形写像を理解する具体例の宝庫です．相互に行き来すると楽しくなります．

7. まだまだあります

具体的難所として微分方程式とベクトルの 2 つを取り上げ少し詳しく説明しましたが，他にも触れたい難所はまだまだたくさんあります．例えば，数（無次元量）の加減乗除は問題ないのですが，量（次元のある量）の加減乗除，単位の換算などで躓く人が想像以上に多いのもその一つです．数と量の区別は大切な問題で放送大学，杉本大一郎氏の数理リテラシーの講義[1)]ではこの問題に 1 章を割いています．

最も多くの人が挫折する（しそうになる）のが角運動量とトルクの概念，およびそのベクトルの外積による表現です．私も教え方をあの手この手と変えてみるのですがなかなか巧くいきません．私は大学 1 年のとき「外積は面積を表す」と聞いて感激したのですが，それを真似て「外積は裏表のある面」などと話すと，ベクトルが面であるはずがないと多くの人は混乱し，逆に文字通り本当に面だけと受け取る人がいたりして….

数学はよくできるのに物理は苦手という人が結構多いのも気になっているところです．概念を作り上げるのに，数学だと思うと公理的定義や算法を抵抗感なく受け入れるのですが，物理だと実感できないと拒否反応が起こるのでしょうか．「運動量とか角運動量，なぜそんなもの考えるの．どうも実感できない．」といった例です．私は“運動の勢い”とか“回転の勢い”を表すなどと言ってみるのですがどれだけ助けになっているでしょうか．陰には「物理法則は座標原点を何処にとっても同じ」ということから“運動量保存則”が成り立ち，「物理法則は座標軸の方向をどちらにとっても同じ」ということから“角運動量保存則”が成り立つという深い深い意味があるのです．興味のある方はランダウ・リフシッツ[2)]の本などで勉強してください．

さて，紙数も尽きましたし，難所をすべて解るように解説するのが本特集の趣旨でもありませんから，この辺りで筆をおくことにします．新入生初め若い学生諸君，みんな難所にぶつかって落ちこぼれそうになって悩んでいるのです．落ち込むことはありません．先生にはどんどん質問に行きましょう．少々解らなくても立ち止まらず先に進みましょう．また，関心の幅を広げておきましょう．かえって，勉強したいという気持ちが出てくると思います．

参考文献

1) 杉本大一郎著：『使える数理リテラシー』，放送大学教育振興会 (2003).
2) ランダウ，リフシッツ著，広重徹，水戸巌訳：『力学』（増訂第 3 版），東京図書 (1974).

（いちむら・むねたけ，法政大学情報科学部）

解析学の難所

現象の数理への長い道のり



中村　周

1. はじめに

解析学は，現象を記述する方程式，特に偏微分方程式について理解することを，究極の目標とする学問と言ってよいと思います．しかし，物理や生物，あるいは経済などの現象を記述する解析学の研究を目指す人たち，特に大学の新入生にとっては，「研究」のレベルに至る道のりは，あまりにも遠く，自分は何を目標に勉強をしているのか，何のためにこの数学を学んでいるのか，ということを見失いがちになるのではないでしょうか．この小文においては，自分の学んできた道筋を振り返りながら，解析学の研究を目指す人たちへの，ささやかなガイダンスを書いてみようと思います．

2. 数理物理学という分野

私は，量子力学の基礎方程式であるシュレディンガー方程式の数学的構造の研究をしています．いわゆる「数理物理学」の一分野，ということになると思います．現在の物理においては，量子力学が世界を説明する，と広く信じられており，現象に結びつける計算のほとんどにおいてシュレディンガー方程式が用いられています．したがって，シュレディンガー方程式の研究というのは，多くの物理現象に関わる，広く深い分野であることは，容易に理解できます．近年，喧伝されているナノテクノロジーも，量子コンピューターも量子力学の産物であり，それらを数学的に基礎づけるのがシュレディンガー方程式の数学です．

では，こういう，豊かな現象を記述する物理学の数学的構造を基礎付け，理解しようとする分野の研究を志す人は，何を，どのように学び始めれば良いのでしょうか．実験物理であれば，興味深い現象を初めから目にすることができるかも知れません．あるいは，理論物理であれば，不思議な，突拍子もないアイデアによって，宇宙が説明できる，という理論の説明に興奮するかも知れません．また，代数学であれば，「フェルマーの大定理」のような単純で美しい定理の背後に深い理論があることを聞いて，抽象的な枠組みの理論に飛び込むことができるかも知れません．

でも，量子力学の数理物理においては，「何が問題であるのか」とか，「どういうことができると嬉しいのか」ということを理解できるようになるまでの道のりが，決して短くはありません．それは，解析学，特に偏微分方程式論には共通した特徴かも知れません．「解析学は，成熟した文化の下でしか盛んにならない．だから，フランスが解析学の中心なのだ」というような意見を聞くことがあります．それは，このような事情を反映しているのかも知れません．つまり，解析学の面白さを理解するには「教養」が必要だ，ということのようです．

3. 物理学を学ぶ必要性はあるのか？

物理学の方程式を研究する，というとき，2つの考え方があると思われます．一つは，方程式の数学的構造は，それ自身で意味のあるものであり，「純粋に」数学として研究するのに，物理学の知識は必要ない，という考え方です．もう一つは，（常識的な考え方と思いますが）物理学を学び，どのような現象を記述する方程式であり，どのような解法や近似法が使われているかを勉強する必要がある，という考え方です．「純粋数学」としては，前者の考え方も成立するのかも知れませんが，私は無理のある考え方だと思います．一体，物理現象を知らないのに，物理の方程式を研究して何が面白いのでしょうか？ やはり，物理学の方程式を研究するのには，ある程度は物理学を知っておく必要があると思います．

しかし，物理学の教科書をそれ自体として信じなければいけない，ということではありません．実際，物理学の教科書に書かれていることが，数学的に間違っている，というのは珍しいことではありませんし，物理学者が見逃していた，解の微妙な構造を数学者が見つけることもあります．私自身，数学の研究を志すようになった大きな理由は，物理学の本に書いてある数学的な説明，理論構築に納得できなかった，ということがあります．「理論的に美しい」と言われていた，ランダウ・リフシッツの『力学』や『量子力学』の教科書も，厳密に書かれているとは，とても思えず，物理学の理論を学ぶことは自分には合っていないのではないか，と考えるようになったのです．

それでも，物理学の理論，今の話題では，量子力学の基礎を学ぶことは，とても大切だと思います．量子力学の教科書に書かれている物理現象の説明は，とても興味深いものですし，たとえ，そこに書かれた説明が正しくないとしても，それを正当化する理論を構築することができるかも知れません．実際，そのような目的で数理物理学の理論が作られることも少なくないのです．数学的な厳密性を求める人も，物理学の理論は，「そのようなもの」として，完全に正しくはないかも知れないけれど，現象をうまく説明する「理屈」，として受け入れると良いのではないかと思います．何と言っても，（物理学に限らず）「現象」というのは驚きに満ちています．それ自身で興味深いですし，完全には理解できないけれども，「面白そう」な現象をたくさん心に植え付けることは，将来の研究課題に直接結びついてきます．

4. 研究までの，長い道のり

さて，物理学（あるいは生物学，経済学）を少しかじって，そこに現れる方程式の数学を研究するぞ，という意気込みが湧いてきた所で，数学を勉強することになったとしましょう．例えば，量子物性理論に興味を持ち，物性理論のシュレディンガー方程式，あるいは場の方程式の解析をしたい，と思ったとして，そのための数学の準備をしようと考えると，その道のりは（振り返って考えてみても）気が遠くなるほど遠いものです．教養部で学ぶ微積分，線形代数は，もちろんあらゆる場面で用いられる「読み書きそろばん」のようなものですし，ベクトル解析を含む多変数の微積分，実数論，常微分方程式の基礎理論と解法も，日常的な道具です．解析学の「初歩」と言える，複素関数論，位相空間論，ルベーグ積分，フーリエ解析の初歩，古典的偏微分方程式の解法，関数解析の入門，という辺りは，大学院における研究を始める「資格」というべき準備段階でしょう．ここまでの勉強で，「物理現象」は（理論の背景に潜んでいるとしても）目に見えてきませんし，どんな関係があるのかも見えにくいでしょう．そういう勉強を4年間も続けなければなりません．実際には，数学それ自身に興味を持って勉強できるようでなくては，続けることは難しいでしょう．いずれにせよ，ここは避けては通ることのできない段階で，ここでいい加減に済ませてしまい，きちんとした理解ができていないと，肝心の研究でつまずくことになります．

5. 現象の解析学に出会う

上に書いたような解析学の基礎を（ある程度）身につけると，やっと（例えば）量子力学の解析学（スペクトル理論，散乱理論，など）のテキストを読み始めることになります．しかし，最初には「解の存在，一意性」とか，物理的意味のよく分からないことから学び始めなければなりません．しかし，ここも避けては通れないのです．きちんと定義されない量について解析することはできません．方程式の解の性質が一所懸命解析して得られたとしても，解が実は存在しなかったり，幾つも解があってどの解の性質なのか分からなかったら，意味がありません．（逆に，そう言う「当たり前」に思えることが成り立たない場合というのは，興味深い現象が潜んでいます．解の一意性が成り立たない量子力学の方程式は，えてして外部の影響を考える必要があることを示しています．）例えば，原子核理論の「散乱の漸近完全性」や，物性物理学の「アンダーソン局在」を理解したいと思っても，そこまでには，さらにたくさんの準備をしなければならないのです．

そうしてやっと，上に書いた「散乱の漸近完全性」や，「アンダーソン局在」をテキストで学習することになります．これらの結果は，物理学としては簡単に説明されて，「証明」とされる事柄です．しかし，数学としてきちんと定式化して証明すると，大掛かりですが，美しく深い理論となります．このような古典理論を学ぶことにより，なにが「美しい」数理物理の理論であるかを見出すことになります．

これらの，「古典理論」と言われるような定理は，一朝一夕に証明できるものではありませんし，これを学んで研究ができるようになる，というわけではありません．いわば，古典的な小説を読んで，「こういう小説を書けるようになりたい」ということができる段階にやっと来たわけです．次は，小説の読者から，小説家へと段階を進めなければなりません．

6. 駆け出しの研究者になる

さて，「小説の読者から小説家へ」と書いたわけですが，この２つの段階の間の距離が小さいのが，数学という学問の特徴ではないかと思います．我慢して，苦労して「何をやっているか」を学ばなければならないけれど，いったん理論を理解し，自分のものとすれば，それを次の段階に進めるために必要なのは，問題意識と想像力だけなのです．

とは言っても，テキストを読んで，すぐにそれに続く理論を作れるような人は，ほとんどいないのではないかと思います（天才物語の中でしか，実際には出会うことはないだろうと思います）．そこで，研究論文を読むことになります．論文を読む理由というのは，新しい結果が書いてあるからだけではありません．テキストに書いてある定理でも，原論文を読むと，多くの発見があります．それは，その問題を考える動機，「なまの」問題意識が，新鮮な形で論文には記されているからです．数学の論文というのは，常に研究の「途中経過」の報告です．ほとんどの論文は，「本当はこういうことが証明したいけれど，ここまでしか分からなかった」という結果の報告です．そういう論文を読むことで，多くの果たせなかった夢に接する中で，数学の研究とはこういうものなんだ，ということを自然に身につけていくのではないかと思います．本当のところ，このような感覚は，論文を読むより研究者のセミナーを聴いたり，直接教えてもらったりするほうが，もっと有効に身に付きます．そして，それこそが活発な研究者のいる大学で学ぶことの，真のメリットなのでしょう．

ここまで来れば，もう「駆け出しの研究者」になるのは目前です．論文を読んで，「本当はこういうことを証明したかったんだろうけど，こういう場合にはこうすればできるんじゃないかな」とか，「この議論，証明は，こういう問題にも使えるんじゃないかな」という思いつきを，数学的にきちんと書くことができれば，もう立派な「論文」です（ささやかな結果かも知れませんが）．最初の目標だった，自然現象を記述する方程式が，本当に

期待される現象を記述しているのか，考えることもできるようになります．当然のこととは思いますが，多くの場合，ここまでに至る勉強の中で興味の対象も移り変わっているかも知れません．でも，ときには初心に戻って，本当に興味のある問題を振り返ってみるのも大切なことではないかと思います．

7. 研究者となるとは，どういうことだろう

こうして，駆け出しの研究者になることができたとして，はたして研究者として生きていく，というのはどういうことなのでしょうか．逆説的に聞こえるかも知れませんが，自分が研究を続けられるような気がする理由は，「自分は余りにも物を知らない」ということです．「自然界は未知の事柄が溢れている」というような，一般的なことではなくて，単に自分の知識が足りない，(知られている事柄に関する）理解が足りない，ということです．「自分は研究の最先端にいるのだから，既知の結果を超えて，全く新しい理論を作るのだ」と意気込んでみても，何もない所から新しい理論を作ることは簡単ではありません．少しずつでも，新しいことを学びながら，混沌として，分からないことだらけの現象の中から，理解できる部分を見つけ出してくる，という，ささやかな営みが研究なのではないか，と考えることもあります．

自然科学を背景として持つ解析学の方程式には，たぶん我々が生きている間には汲み尽くすことのできない豊かな世界が潜んでいます．解析学の研究を志すのは，気の長い，息の長い営みですが，登ってみて初めてその気持ちの良さが分かる，「高い山」のようなものかも知れません．そして，本物の山と同様，一人の人間の一生では知り尽くせるはずもない，豊かな多様性を持っているのでしょう．

8. 参考になる（かも知れない）本など

私が大学に入学した約30年前に比べると，現在は，読みやすさに留意した教科書がたくさん出版されています．だから，「自分に合った教科書を探しましょう」と言うだけでいいのかも知れません．しかし，古めかしい「古典的な」教科書を見てみると，ある種の新鮮さが感じられることもあります．高木貞治著『解析概論』(岩波書店）は現在でも広く読まれていると思いますが，竹内端三著『函数論』(裳華房）や，原島鮮著『力学』(裳華房）なども，丁寧に書かれていて，とても良い教科書と思います．偏微分方程式の教科書としては，やはり少し古典的な感じのする，溝畑茂著『偏微分方程式論』(岩波書店）や，もっと現代的な熊ノ郷準著『偏微分方程式』(共立出版）などは，私にはとても勉強になりました．また，Gerald B. Folland の書いた教科書：‘Real Analysis’ (Wiley Interscience）と ‘Introduction to Partial Differential Equations’ (Princeton University Press）は，とても簡潔明快で，感覚が合えば素晴らしい教科書と思います（合わない人も多いと思いますが）．

（なかむら・しゅう，東京大学大学院数理科学研究科）

量子力学の難所

波束の収縮，観測問題



福田　礼次郎

量子力学はミクロな対象，例えば電子を記述する理論であって，誕生から100年近く経っているがすべての理論的な計算結果と実験的な事実が整合していることから，その正しさは完全に証明されていると言ってよい．おそらく将来も修正を蒙ることはないであろうと思われる．

1. 量子力学のパズル

ところが量子力学は常識では受け入れ難いパズルとでも言うべき事柄をたくさん含んでいる．そのうち以下の議論に直接関係するパズルを3つ挙げよう．

パズル 1.　ミクロな対象は波であると同時に粒子である．

まず，量子力学を理論として構成している前提そのものがパズルなのである．それは，量子力学が次の2つの前提 A, B から成り立っていることによる．

A.　観測されていないうちは，波として時間発展する；

電子には波動関数 Ψ が付随していて，ハミルトニアンを H とすれば，時間発展は次のシュレーディンガー方程式と呼ばれる偏微分方程式に従う．

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=H\Psi. \qquad (1)$$

Ψ は時間 t と，電子の座標 $\boldsymbol{r}$ の関数 $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ である．H は $\boldsymbol{r}$ と運動量演算子 $\boldsymbol{p}=(\mathrm{i}/\hbar)\boldsymbol{\nabla}$ で書かれている．$\Psi(\boldsymbol{r},t)$ は時間ごとに $\boldsymbol{r}$ の関数と見れば t とともに形をスムーズに変化させるので「波」である（複素数ではあるが）．

B.　観測すると粒子になる；

粒子の場所を測定した場合，どこか一点に見出される！ 波なのに…．どこに現れるかはめちゃくちゃ（random）であってなんとも言えない．しかし同じ Ψ を持つ電子をたくさん用意して何回も繰り返し実験すると，波であったことが次のようにして分かる．t に対応する時刻で N 回の実験を繰り返したとしよう．そして，ある1点 $\boldsymbol{r}$ を含む小さな領域 $d^3\boldsymbol{r}$ に $N(\boldsymbol{r})d^3\boldsymbol{r}$ 個の電子が見つかったとしよう．無限に実験を繰り返したとき，この領域に見出される確率は $\lim N(\boldsymbol{r})/N$ である．この確率がこの点の波動関数の絶対値の2乗だというのが，第2の「前提」である．

$$|\Psi(\boldsymbol{r},t)|^2d^3\boldsymbol{r}=\lim_{N\to\infty}\frac{N(\boldsymbol{r})d^3\boldsymbol{r}}{N}. \qquad (2)$$

前提 A と B は到底両立し難いように見える．しかし (2) が実験で確かめられているのであるから，A と B を合わせると，電子は「観測されていないうちは波として振舞い (1) に従うが，観測されたら突然粒子に変化して，何回も観測を繰り返せば (2) を満たす！」ことになる．確率はすべての場合を足せば1になるので，全空間での積分は規格

化条件 $\int |\Psi(\boldsymbol{r},t)|^2 d^3\boldsymbol{r} = 1$ を満たす．さて，1回の実験で電子が $\boldsymbol{r}$ に見つかったとしよう．その状況ですぐにもう一度測定すれば必ず同じ場所 $\boldsymbol{r}$ に確実に見つかるはずであるから，測定直後の波動関数は，$\boldsymbol{r}$ の近傍のみゼロではなく，他はすべてゼロの形となっている．規格化条件より，Ψ は $\boldsymbol{r}$ 位置のみに大きな値を持つ．測定前の波動関数は測定によって $\boldsymbol{r}$ にピークを持つ波動関数に瞬時に変化した！ これは波束の収縮（contraction または reduction of wave function）と呼ばれている．このことがパズルでないと思う人はおそらくいないであろう．しかし事実なのである．ミクロな対象は，あるときは波，またあるときは粒子なのである．

パズル 2.　マクロな対象は，観測をする，しないにかかわらず粒子である．

ここでマクロな系とは，粒子の数が大変多い系，詳しくは $N = 10^{23}$ のオーダーの系のことである．上の1粒子の場合を，2粒子，3粒子，さらに N 粒子に拡張すると，波動関数は，粒子の座標の関数 $\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N, t)$ となる．この場合も測定しない間は多変数の波として振る舞うはずである．野球のボール（我々の体でもよいが）を考えてみると，これはマクロ系と言ってよい．ところが野球のボールが波として振る舞っているとは思えない．大きさはあるがちゃんとした軌道を描くという意味で粒子である．重心の座標を取ってみれば点粒子が描く軌道を描いている．その軌道はニュートン方程式に従っていて波などではない．しかしボールに含まれている原子分子を作り上げている電子の各々は，量子力学に従っている波なのである．そうでなければボールの中の原子分子は存在できないことになる（古典力学では原子分子は作れない）．結局，「マクロな系では，全体としての運動は粒子を表す古典力学で記述され，内部のミクロな振舞いは波として量子力学に支配される」と言い表すことができる．このようなことが量子力学の範囲内で説明できるのであろうか？これが第2のパズルである．

さて，全体としての運動を記述する変数はマクロ変数と呼ばれ，重心座標 $\boldsymbol{r}_G$ が代表的なものである．簡単のため1次元とし，N 粒子の質量がすべて同じとすれば，重心座標は単に N 粒子の座標の平均値である；$x_G = \sum_{i=1}^{N} x_i / N$．重心から測った各粒子の座標（重心座標系での座標）を x'_i とすれば，

$$\begin{aligned} & x_i = x_G + x'_i \quad (i = 1, 2, \cdots, N), \\ & \sum_{i=1}^{N} x'_i = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

が成り立つ．(3) の後ろのほうの関係は自然に出てくる拘束条件である．もし x'_i を不変に保ったまま x_G が変化したとすれば，すべての x_i がいっせいに同じだけ移動したことになる．この意味で，x_G は系の「全体としての運動」を記述している．多くの場合，$\Psi(x_1, x_2, \cdots, x_N, t)$ は変数分離していて，

$$\begin{aligned} & \Psi_1(x_G, t)\, \Psi_2(x'_1, x'_2, \cdots, x'_N, t) \\ \equiv\ & \Psi_1(x_G, t)\, \Psi_2([x'], t) \end{aligned} \tag{4}$$

のように書ける．記法を簡単にするため $\Psi_2(x'_1, x'_2, \cdots, x'_N, t)$ を $\Psi_2([x'], t)$ と書くことにする．x_G がある軌道 $x(t)$ の位置で $\Psi_1(x_G, t)$ がピークを持っていれば，重心は確実に古典的な軌道 $x(t)$ を描くと言える．さらに，重心から見た個々の電子の座標は量子論的な波動関数 $\Psi_2([x'], t)$ で記述されることになる．野球のボールの全体としての運動は $\Psi_1(x_G, t)$ が支配し，内部のミクロな構造は Ψ_2 が受け持つことになる．

パズル 3.　ミクロな状態の違いをマクロな変数の違いで表せるか？

ところで我々がシグナルとして認識できるのはマクロ変数の状態が変化したときのみである．電子がどのような状態にあろうとも，そして状態を変化させようとも直接認識することはできない．実験でミクロな対象を測定するときはその状態の違いをマクロな変数の違い，例えば測定器の針の位置の違いに焼き直さなければならない．これがで

きなければミクロな対象を測定することができないのである．そのため工夫を凝らして測定器を作ることになる．測定器の針の座標を上に現れた重心座標と考えてみよう．ミクロな電子の波動関数を $\psi(x,t)$ とする．位置の測定を拡張して一般の電子の物理量 O を測定する場合を考えると，測定プロセスは次のようになる．まず，O の固有関数 $\phi_n(x)$ $(n=1,2,\cdots,\infty)$ を用意する．それは

$$O\phi_n(x)=\lambda_n\phi_n(x) \tag{5}$$

という固有値方程式を満たす関数全体である．λ_n を固有値と呼ぶ．任意の波動関数はこの固有関数のセットで展開できて，$\psi(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(t)\phi_n(x)$ と書ける．ここで展開係数 $c_n(t)$ は ψ が含む ϕ_n の重みを表す．電子と測定器全体の波動関数は，測定前は相互作用していないので両者の波動関数の積としてよいだろう．(4) を用いて

$$\begin{aligned}&\psi(x,t)\,\Psi_1(x_G,t)\,\Psi_2([x'],t)\\ &=\left(\sum_{n=1}^{\infty}c_n(t)\phi_n(x)\right)\Psi_1(x_G,t)\,\Psi_2([x'],t)\end{aligned} \tag{6}$$

と書ける．Ψ_1 は $x_G=x_0$ でピークを持っている．これが測定前の針の位置である．これは波動関数と言うよりも古典的な点粒子の密度（の平方根）とみなすほうがよい．$\psi(x,t)\,\Psi_2([x'],t)$ は量子論的なもので，これが量子論のベクトル空間（ヒルベルト空間）のベクトルである．結局，Ψ_1 のピークの位置，つまりマクロ変数 x_G の値が決まれば，残りのミクロ変数全部が1つのヒルベルト空間を構成しているという描像になる．このように1個のヒルベルト空間で系全体が記述できるとき，系の状態は純粋状態（pure state）にあると言う．

さて，電子が測定器を通過したあとは，重心座標が n に応じて異なる値だけ変化すれば電子がミクロな状態 ϕ_n のどの状態にあったかを，マクロな変数 x_G の違い，詳しくは $\Psi_1(x_G,t)$ のピークの位置の違いから知ることができる．式で書けば，測定のあとでは系全体の波動関数が

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n(t)\,\Psi_{1,n}(x_G,t)\,\Psi_{2,n}(x,[x'],t) \tag{7}$$

となっていて，$\Psi_{1,n}(x_G,t)$ のピークの位置が n ごとに異なればよい．このようなことを実現させるためには増幅が必要である．(7) では，ミクロな変数はすべて $\Psi_{2,n}$ の中に押し込めてある．さて，(7) の和の中の一つ一つの項は，マクロ変数の値が異なり，1つの項には波動関数 $\Psi_{2,n}$ が付随していて，これがそのマクロ変数に対応するヒルベルト空間を作っている．これらのヒルベルト空間は Ψ_1 まで含めて考えると，n と n' が違うとピークの位置が異なるので積を取るだけでゼロなのである；

$$\begin{aligned}&\Psi_{1,n}(x_G,t)\,\Psi_{2,n}(x,[x'],t)\times\\ &\Psi_{1,n'}(x_G,t)\,\Psi_{2,n'}(x,[x'],t)=0.\end{aligned}$$

これは積分しなくてもゼロになるので，お互いを結びつける量子力学的な操作は存在しない．普通の意味での直交は x_G や $[x']$ で積分してゼロなのであって，上のゼロは実に強いゼロである．積がゼロとなる量の和をとるときは $\oplus$ と言う記号を用いることが多い．異なるヒルベルト空間の和となっているわけで，(7) は「混合状態」と呼ばれる．(6) から (7) への時間発展は，「純粋状態（pure state）から混合状態（mixed state）へ変化した」のである．混合状態では異なる n を結ぶユニタリー変換は存在しない．ある古典軌道を別の古典軌道に変化させるユニタリー変換は作れないためである．混合状態で古典軌道の異なる2つのベクトルは「ユニタリー非同値」と呼ばれる．上のようなストーリーが可能か？ これがパズル3である．

それにしても (7) で現れた「マクロに異なる状態の重ね合わせ」とは何なのか？ ボールがここにある状態と別の場所にある状態の一次結合にどのような意味があるのか？ マクロな変数はニュートン方程式に従うはずなので，初めにどこかに居たボールがそのような状態に時間発展することはないはずである．一次結合の中のどれか1項が選ばれているはずだ．こうして再びパズル1にもどっ

た．そこで，前提 B を次のように拡張する．「物理量 O を測定したとき，O の固有値のどれか 1 つが得られる．何回も同じ実験を繰り返すといろいろな固有値が不規則に得られる，固有値 λ_n が得られる確率が $|c_n(t)|^2$ である．」何も (7) からこのことが言えるのではない．むしろ (7) が解釈できないので，このように要請するのである．

■ 2. パズル 2, 3 は難所か？ ■

パズル 2, 3 におけるマクロ変数の性質を，量子力学から導く方法は幾つかある．よく知られているのは，系が環境の中にあって外から常に擾乱を受けて，純粋状態が混合状態に変化するというものである[1~4]．しかしここでは他の方法として，「定常位相」の考えを紹介しよう[5]．（一般的なマクロ系の量子現象に関しては文献 6) を参照．）

2.1 定常位相

N 粒子系が一様重力場の中を落下する場合を考えよう．x 軸を鉛直上方にとり重力加速度を g とする．ハミルトニアンは，

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^{N}\frac{m}{2}\dot{x}_i^2+\sum_{i=1}^{N}mgx_i+V(x_i-x_j) \\ &= \frac{Nm}{2}\dot{x}_G^2+Nmgx_G+\sum_{i=1}^{N}\frac{m}{2}\dot{x}_i'^2 \\ &\quad +V(x_i'-x_j') \\ &\equiv H_G+H' \end{aligned} \tag{8}$$

である．ここで相互作用項ポテンシャル $V(x_i-x_j)$ は多くの場合粒子の差のみに依存するので，(3) の拘束条件を用いると x_G には依存しなくなることに注意しよう．さらに拘束条件から，運動エネルギーは重心の運動エネルギーと重心から見た運動から来る運動エネルギーに分解できた．重心の運動は全質量 Nm の 1 個の点粒子の重力場中の運動のハミルトニアンと同じである．ハミルトニアンが変数分離できたので，経路積分による表示も x_G と x_i' を別々に次のように実行できる．（経路積分の簡単な説明は後の 2.2 節を参照．）

$$\prod_{i=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}dx_i=\prod_{i=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}dx_G\prod_{i=1}^{N-1}\int_{-\infty}^{\infty}dx_i'.$$

最後の $N-1$ は $\sum_i x_i'=0$ によって，N 個の変数 x_i' のうち，適当に独立な $N-1$ 個の変数を取ったものとしてある．さて，$t=t_I$ で $(x_{GI},[x']_I)$ であった状態が，$t=t_F$ で $(x_{GF},[x']_F)$ に見出される確率振幅（kernel）を考えよう．

$$\begin{aligned} &\langle x_{GF},[x']_F\mid\exp\{-\mathrm{i}H(t_F-t_I)/\hbar\}\mid x_{GI},[x']_I\rangle \\ &=\langle x_{GF}\mid\exp\{-\mathrm{i}H_G(t_F-t_I)/\hbar\}\mid x_{GI}\rangle\times \\ &\quad\langle[x']_F\mid\exp\{-\mathrm{i}H'(t_F-t_I)/\hbar\}\mid[x']_I\rangle. \end{aligned}$$

L_G を (8) の H_G に対応するラグランジュ関数として，重心の経路積分は次のように書ける．

$$\begin{aligned} &\langle x_{GF}\mid\exp\{-\mathrm{i}H_G(t_F-t_I)/\hbar\}\mid x_{GI}\rangle \\ &=\int[dx_G]\exp\left\{\mathrm{i}\int_{t_I}^{t_F}L_G dt/\hbar\right\}. \end{aligned}$$

実際は $t_F-t_I=n\Delta t$ のように区間を幅 Δt の n 個に分割して，両端を除いた $n-1$ 個の各時刻の変数 x_{Gk} $(k=1,2,\cdots,n-1)$ で積分する．(x_{G0},x_{Gn}) は (x_{GI},G_{GF}) に固定する．$A=\sqrt{2\pi\mathrm{i}\Delta t/Nm\hbar}$ を規格化因子として

$$\begin{aligned} &\prod_{k=1}^{n-1}\left(\int_{-\infty}^{\infty}dx_{G,k}/A\right)\exp(\mathrm{i}Nm/\hbar)\times \\ &\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{(x_{G,k+1}-x_{G,k})^2}{2\Delta t}-gx_{G,k}\Delta t\right) \end{aligned} \tag{9}$$

となる．N が大きいと exp の肩に乗っている位相が大きくなり，位相の変化がない点（定常位相点）のみが積分に効く．他の領域は位相が激しく変化するので相殺して積分には効かない．このことを 1 変数の積分で見てみよう．

$$J=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\exp\{\mathrm{i}Ng(x)\}dx$$

において，$g'(x)=0$ を満たす点（定常位相点）を x_0 として，$g(x)=g(x_0)+g''(x_0)(x-x_0)^2/2+\cdots$ と展開して $(x-x_0)^2$ より高次の項は肩から下ろしてまた展開する．$f(x)$ も $f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\cdots$ と展開する．各項の正確な積分はできるが，

その結果は位相が $O(1)$ まで効いているとして $|x - x_0| = O(1/\sqrt{N})$ として評価したものと $1/N$ の冪に関しては一致する．結局，展開項の中の $f(x_0)$ 以外の項は $N \to \infty$ でゼロになって

$$\lim_{N\to\infty} J$$
$$= f(x_0)\exp\{\mathrm{i}Ng(x_0)\}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{\mathrm{i}Ng''(x-x_0)^2\}dx$$
$$= f(x_0)\sqrt{2\pi\mathrm{i}/Ng''(x_0)}\exp\{\mathrm{i}Ng(x_0)\}$$

となる．任意の $f(x)$ に対して $f(x_0)$ が拾い出されるので，デルタ関数の定義から $B = \sqrt{2\pi\mathrm{i}/Ng''(x_0)}$ と置けば，公式

$$\lim_{N\to\infty}(1/B)\exp\{\mathrm{i}Ng(x)\}$$
$$= \delta(x - x_0)\exp\{\mathrm{i}Ng(x_0)\} \qquad (10)$$

を得る．無限大の位相因子を除いてデルタ関数になるのである．積分の 1 点だけ効いているのであるが，このことがマクロ変数が波動ではなく点粒子として扱えることにつながる．(9) は多重積分であるが，各積分毎に定常位相を拾い出す．こうして $k = 1, 2, \cdots, n-1$ として

$$\frac{1}{\Delta t}\left(-\frac{(x_{G,k+1}-x_{G,k})}{\Delta t} + \frac{(x_{G,k}-x_{G,k-1})}{\Delta t}\right) = g$$

を得る．これから定常位相を与える $x_{G,k}$ は各時刻で等加速運動をして落下する軌道上にあることが分かる．時刻 $t_{I,F}$ では $x_{GI,GF}$ を通るという条件がついている．正に古典的なニュートン粒子と見てよい．積分する前のデルタ関数の公式 (10) を $n-1$ 個用いて積分すると

$$\lim_{N\to\infty} J$$
$$= \delta\left(x_F - x_I + (g/2)(t_F - t_I)^2\right)\exp\{\mathrm{i}S(t_I, t_F)\}$$

となる．ここで $S(t_I, t_F)$ はこの問題の古典的な作用関数，$x_F = x_I - (g/2)(t_F - t_I)^2$ は古典的な軌道であって $\lim J$ はこの軌道上でピークを持っている．

（注） 現実の世界は $\hbar \to 0$ ではない．$\hbar \to 0$ とすると，x'_i のほうもすべて古典的になってしまって，ボールの中の原子分子ができなくなってしまう．$N \to \infty$ が求める極限で，x_G のみ古典的変数にしてくれる．

2.2 経路積分の説明

1 次元で，質量 m の粒子の運動量を p，ポテンシャルを $V(x)$ とすると，ハミルトニアンは $H = p^2/2m + V(x)$ である．時間発展の kernel を $T = t_F - t_I = n\Delta t$ のように n 個の小さな区間に分割して，最後に $\Delta t \to 0$ の極限をとる．$t_k = t_I + k\Delta t$，t_k における座標を x_k，$k = 1, 2, \cdots, n-1$ として，$x_0 = x_I$，$x_n = x_F$ は固定する．時間発展の kernel $K = \langle x_F \mid \exp\{-\mathrm{i}HT/\hbar\} \mid x_I\rangle$ を n 個の因子の積で書こう；

$$K = \langle x_n \mid \exp\{-\mathrm{i}H\Delta t/\hbar\}\exp\{-\mathrm{i}H\Delta t/\hbar\}$$
$$\cdots\cdots\exp\{-\mathrm{i}H\Delta t/\hbar\} \mid x_0\rangle.$$

ここで各因子の間に，座標の完全系を挿入する．

$$K = \left(\prod_{k=1}^{n-1}\int_{-\infty}^{\infty}dx_k\right)$$
$$\times\langle x_n \mid \exp\{-\mathrm{i}H\Delta t/\hbar\} \mid x_{n-1}\rangle\langle x_{n-1} \mid$$
$$\times\exp\{-\mathrm{i}H\Delta t/\hbar\} \mid x_{n-2}\rangle\langle x_{n-2} \mid$$
$$\cdots\cdots \mid x_1\rangle\langle x_1 \mid \exp\{-\mathrm{i}H\Delta t/\hbar\} \mid x_0\rangle.$$

一般項を次のように評価する．まず Δt を小さいとして exponential の肩から下ろす．さらに運動量の完全系を挿入して H の中の p や x を固有値を表す状態の値に置き換える．$H(k) = p^2/2m + V(x_k)$ として，

$$\langle x_{k+1} \mid \exp\{-\mathrm{i}H\Delta t/\hbar\} \mid x_k\rangle$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}dp\langle x_{k+1} \mid \left(1 - \mathrm{i}H\Delta t/\hbar\right) \mid p\rangle\langle p \mid x_k\rangle$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}dp\langle x_{k+1} \mid \left(1 - \mathrm{i}H(k)\Delta t/\hbar\right) \mid p\rangle\langle p \mid x_k\rangle$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dp\exp\{\mathrm{i}p(x_{k+1} - x_k)/\hbar\}\times$$
$$\exp\{-\mathrm{i}H(k)\Delta t/\hbar\}.$$

$\langle x_{k+1} \mid p\rangle$ は平面波 $\exp(\mathrm{i}px_{k+1}/\hbar)/\sqrt{2\pi}$ に，$\langle p \mid x_k\rangle$ は $\exp(-\mathrm{i}px_k/\hbar)/\sqrt{2\pi}$ に等しいことを用いた．p の積分にはガウス型積分の公式，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{\mathrm{i}\left(-\frac{p^2}{2m}\Delta t + p(x_{k+1} - x_k)\right)/\hbar\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{2m\hbar\pi}{\mathrm{i}\Delta t}} \exp\left\{\mathrm{i}\frac{m(x_{k+1}-x_k)^2}{2\hbar\Delta t}\right\}$$

を用いる．$V(x_k)$ のほうも加えて，結局，$A = \sqrt{2\pi\mathrm{i}\Delta t/\hbar m}$ と置けば経路積分の表式を得る；

$$K = \prod_{k=1}^{n-1}\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx_k/A\right)\exp\{\mathrm{i}S/\hbar\},$$
$$S = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{m(x_{k+1}-x_k)^2}{2\Delta t} - V(x_k)\Delta t\right). \quad (11)$$

なお，$\Delta t \to 0$ の極限では，

$$S = \int_{t_I}^{t_F}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - V(x)\right)dt = \int_{t_I}^{t_F} L dt$$

と書ける．この形では，S は古典力学の作用汎関数，L はラグランジュ関数である．経路積分と言われるのは次のような事情による．(11) は多重積分ではあるが，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ をセットとして一つの値に固定すると，それは粒子の一つの軌道を表す（図 1 を参照）．すべての x_k で積分するということは，すべての軌道（経路）を足し合わせる（重みは $\exp\{\mathrm{i}S/\hbar\}$）ことを意味する．経路積分と言われるゆえんである．

2.3 測定の間は，対象をしっかり捕まえて動かないようにする．

測定が成立するためには，ミクロな対象がマクロな違いに反映されて，(7) のように n の違いによって $\Psi_{1,n}(x_G)$ が x_G の異なる位置にピークを持つように増幅しなければならない．それには測定される対象が測定器の中の多くの（N のオーダーの）ミクロな変数と相互作用すればよい．対象の物理量 O を測るとして，対象と測定器の中のミクロな自由度との相互作用 H_I が $O\sum_{i=1}^{N} x_i = NOx_G + O\sum_{i=1}^{N} x'_i$ の形をしていたとする．このとき，対象の O の値の違いによって x_G には N のオーダーの異なる相互作用 NOx_G が働くのでよさそうである．詳しく言えば，対象と測定器全体のハミルトニアンは，$H = H_O + H_D + H_I$ と書けて，H_O は対象のもので $O(1)$，H_D は測定器のもので $O(N)$，H_I は両者の相互作用を表し上で説明したように $O(N)$ になっている．よって $N \to \infty$ では H_O は無視できる．測定直前の全系の波動関数は

$$\left(\sum_n c_n(t_I)\psi_n(x)\right)\Psi_1(x_G, t_I)\Psi_2([x'], t_I) \quad (12)$$

であった．測定器を $t = t_I$ でスイッチオンすると $H_O + H_D + H_I$ で時間発展するが，H_O は無視して，後の t では (12) に $\exp\{-\mathrm{i}(H_D + H_I)(t - t_I)\}$ を演算すれば得られる．このとき，(5) を用いて H_I の中の O は λ_n に置き換えて，$H_I = N\lambda_n x_G + \cdots$ としてよい．$\cdots$ は x'_i に作用する部分で，$\sum_n$ は先頭に持ってくる．さて，H_O が無視できたので $H_D + N\lambda_n x_G + \cdots$ には対象に演算する演算子は入っていない．よって対象はもし時刻 t_I に $\psi_n(x)$ にあれば，時間発展しないで，H_I がゼロでない限り，つまり測定器が働いている限りずっと $\psi_n(x)$ のままである．$\psi_n \leftrightarrow \psi_m$ のようにいろんな状態の間に揺らぐことはない．対象がじっとしているのでこの間にマクロ変数 x_G が変化できるのである．実際，$O(N)$ の部分が λ_n の違いで異なるので，異なる定常位相の軌道ができ上がる．しかもそれができるのに，スウィッチオンした t_I から時間はかからない．なぜかと言えば，定常位相はハミルトニアンの $N\lambda_n x_G(t - t_I)$ が $O(N)$ であればできるので，$(t - t_I)$ が有限であればどんなに小さくてもよいから．測定器を切って時間発展させると，今度は H_O が効いて対象は揺らぐことになって全体の波動関数は正に (7) のように $c_n(t_I)\Psi_{1,n}(x_G, t)\Psi_{2,n}(x, [x'], t)$ の一次結合になる．ミクロからマクロへの写像は $\Psi_{1,n}(x_G, t)$

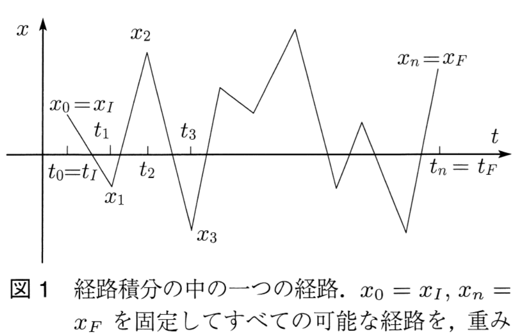


図 1　経路積分の中の一つの経路．$x_0 = x_I$, $x_n = x_F$ を固定してすべての可能な経路を，重み $\exp\{\mathrm{i}S/\hbar\}$ で足し上げる．

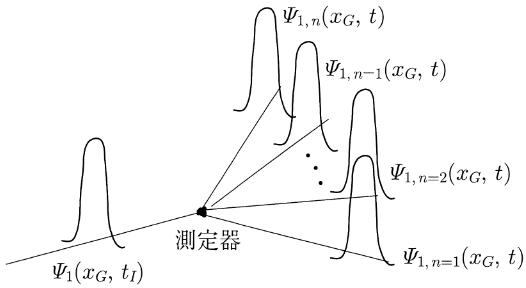


図 2　測定過程でのマクロ変数の波動関数の時間発展の様子．測定器を通るとピークがマクロに異なる軌道を描くものの一次結合となる．波動関数のミクロ変数に関する部分は書かれていない．

が n によって異なる軌道を描くのでしっかりできている．この様子を図 2 に概念的に描いてある．$N\lambda_n x_G$ の項は上の重力場中の運動と比べて，n によって異なる重力定数が働いて，重力定数が異なれば x_G は別の軌道を描くと言うこともできる．この部分の議論を比喩的に言えば，ちょこちょこ動く子供の身長をはかるとき，手で押さえてその間に測る．手を離すとまた動くけれど記録できているので大丈夫．この状況と似ている．

■ 3. パズル 1 こそ本当の難所 ■

このように議論してくると，パズル 1 こそ本当の難所で，パズル 1 の前提 A, B を納得させるのは大変な仕事であろうと予想される．まず，$|c_n(t_I)|^2$ が確率であることを言うためには，1 回の実験で λ_n のどれか 1 つが選ばれること，そして何回も繰り返して λ_n が得られた比率が $|c_n(t_I)|^2$ に等しいことを示さねばならない．確率とはそういうものである．しかしこの点に関しても幾つかの考えはある．常に波束の収縮が実際に起こっているとして，シュレーディンガー方程式にランダムな揺動項を付け加えるモデル[7~9]，粒子的な描像が本来の姿であって，それが時間のスケールが小さいところで見えるという考え[10] などがあるが紙面の関係で省略する．

参考文献

1) 包括的なレビューとして，W.H. Zurek, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 715 (2003).
2) M. Schlosshauser, *Rev. Mod. Phys.* **76**, 1267 (2004).
3) H.D. Zeh, *Lect. Notes Phys.* **538**, 19 (2000).
4) R. Omnes, *Phys, Rev.* **A65**, 052119 (2002).
5) R. Fukuda, *Phys. Rev.* **A38**, 8 (1987); **A39**, 3023 (1987); *Prog. Theor. Phys.* **81**, 34 (1989); **85**, 441 (1991);『マクロ系の量子力学』パリティ物理学コース（丸善）.
6) マクロ系の量子効果に関して，高木伸著『巨視的トンネル現象』新物理学選書（岩波書店）.
7) G.C. Ghirardi, A. Rimini and T. Weber, *Phys. Rev.* **D34**, 470 (1986); P. Pearle, *Phys. Rev.* **A39**, 2277 (1989).
8) A.J. Leggett, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40**, 3141 (2007).
9) A. Bassi and G.C. Ghirardi, *Phys. Rep.* **379**, 257 (2003); A. Bassi, *J. Phys.: Conf. Series* **67**, 012013 (2007).
10) R. Fukuda, arxXiv:0711.4659v1 [quant-ph] 29 Nov 2007.

（ふくだ・れいじろう，慶應義塾大学理工学部）

代数学の難所

抽象的世界に住む

加藤　文元

1. 見通しのよさ

具体的な問題から始めましょう．ウィルソンの定理というものがあります．これは「p が素数なら $(p-1)!+1$ は p で割り切れる」という定理です[*1)]．有名な定理ですから，読者の多くもご存知かと思います．その証明の鍵は「2 以上 $p-2$ 以下の整数は，$nm-1$ が p で割り切れるようなペア $\{n, m\}$ $(n \neq m)$ に分割される」ということにあります．

この鍵そのものは，完全に初等的な証明も可能ですが，これに「気付く」ことはなかなか難しいでしょう．これは，いわば数の世界に隠された一つのパターンなのですが，それを見出すには，多くの具体的な素数 p について，実験的な計算を積み重ねなければならないと思います．

そのような計算をするとき，合同式を使うと，より見通しがよくなるかもしれません．合同式とは

$$a \equiv b \bmod m,$$

つまり「a と b は m で割った余りが等しい」という内容を，等式のように書いたものです．ウィルソンの定理は「p が素数なら $(p-1)! \equiv -1 \bmod p$」と書けます．合同式は普通の等式のように計算できます[*2)]から，これを使うと，計算の負担を大幅に軽減することができます．

合同式による計算は，より抽象的な代数学の言葉を使うと，可換環 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ の中での計算になります．この見方は，もはや初等的とは言えませんが，問題に対する見通しのよさを飛躍的に向上させます．実際，上に述べた「鍵」は，もはや「$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ が体である」ということの，ちょっとした帰結に過ぎません．

代数学が抽象的な物事を好む理由の一つが，ここにあります．それは「見通しのよさ」です．あるいは「パターンに対する感性の洗練」とも言えるでしょう．これによって，より深い構造の発見や，新たな発想の獲得にもつながります．

2. 教えられないこと

しかし，この「抽象性」は，初学者にとって代数学の難所にもなっています．

代数学は，その名が示すように，実際の数でなく，文字や記号を扱います．それらの記号が，具体的な数を表しているという確信が持てる頃は，多くの人は安心して計算できるものです．中学生でもスイスイと文字式の計算をします．高校生になって，文字が「ベクトル」なるものを表すようになると，多くの人が怖じ気づきますが，それでもだんだん慣れていくようです．

しかし，大学に入って抽象的な線形代数を学ぶようになると，状況は一変します．「ベクトルとは

*1)　逆に「$(p-1)!+1$ が p で割り切れるなら p は素数である」も正しく，これをも含めてウィルソンの定理というのが一般的です．

*2)　割り算は気をつけなければなりません．

何か」を一切語らないままに「ベクトル空間」を定義するようになるからです．もはや，それが「何かを表している」という確信が持てなくなります．

このような状況でもスイスイ計算できるようになるためには，やはり，この抽象的な世界に，安心して住めるようにならなければなりません．そして，どうすれば安心できるのか，ということは，教える側もなかなか教えられないものです．

その理由の一つは，それが理屈を超えているからです．先ほど，具体的な数を表すと安心できる，と言いましたが，そもそも数というものだって，本来は非常に抽象的な概念です．それは具体的なものの個数や重さを表しますが，個数や重さ，時間といった，生活の様々な次元で数が利用できるということ自体，数が優れて抽象的な概念であることを示しています．

それでもなお，私たちは普段，この「数の世界」に安心して住んでいます．子供たちがどのようにして数の概念を獲得するか，というのは非常に興味深い問題です．環境が大事であるのは当然でしょう．しかし，それだけではないと思います．やはり，無意識的にせよ，子供たち一人一人の脳がそれなりの知的な努力をする結果だと思います．そして，それがいかにしてなされるのかということは，理屈ではなかなか計り知れません．

もう一つの理由は，教える側も（少なくとも私は）それがはっきりとはわからない，ということです．私は日本人で，日本語を第一言語として話しますが，私がどのようにして日本語の能力を獲得したのかは全くわかりません．人と会話ができるという意味では私の日本語は普遍的ですが，人には人それぞれの話し方や，言葉のリズムがあるものです．ですから，普遍的だが，人それぞれ固有のプロセスを経て，この能力は得られたものだと思います．そして，それはなかなか分析的には語れないものです．

私が抽象的な代数学を勉強し始めた頃は，確かに抽象性の壁を感じました．そして，それを越えるために，自分なりのプロセスを経てきたと思います．しかし，それがどのようなものであったかを客観的に語ることは，容易ではないと感じます．その理由は，私自身それがはっきりとはわからないからだと思うのです．確かに，幼児が第一言語を習得するときのように，実際の具体的事例の体験の反復繰り返しや，具体例での計算の訓練などあったと思います．もちろん，これらの地味な経験の積み重ねは大切なものですが，しかし，それだけではないと思うのです．

チョムスキーは，人間が三次元空間の認識を獲得するプロセスと，言語を獲得するプロセスの類似性について示唆しています[*3)]．だからというわけではありませんが，代数学の抽象的な世界に「住む」ということを，「数の世界」や「言語世界」という（普段は意識しないが実は高度に抽象的な）世界に安心して住んでいることに譬えるのは，それほど無茶な話ではないと感じます．そう感じている人も多いのではないでしょうか．

3. 代数学における「世界公式」

それでもなお，私はその「壁」を越えるための，何らかの方策について書こうとしています．最初にお断りしたいのですが，先にも述べたように，私とてこれについて何か秘策をもっているわけではありません．抽象的な世界に住む，というのは，数や言語の場合と同様に，できてしまえばあっけないくらい簡単なものです．そしてそれが理屈ではなかなか語れない以上，結局は個々人の知的プロセスにお任せするしかありません．それでもなお何か書こうとすれば，それはある程度「戯れ言」になってしまうのを覚悟しなければならないでしょう．そのことを，まず念頭に入れておいてほしいと思います．

では，どうせ「戯れ言」を言うのですから，とてつもなく大袈裟なところから話を始めましょう．ドイツ観念論のフィヒテは，その主著『全知識学の基礎』という非常に難しい本を，三つの原則命題から始めました．その第一命題は「自己は自己自

*3) Chomsky, N.: *Language and Mind*, Third Edition, Cambridge University Press, 2006, pp.64.

身を定立する」というものです．これを「$A = A$」と簡単に書いて，日常世界の「世界公式」と呼ぶ人もいます．これは，人が常識世界に安心して住むために，心の深層に持っている公式であるというのです*4)．

先に私は，抽象的な線形代数学が，ベクトルとは何かを説明せずにベクトル空間を定義するあたりから，人々が不安になるようだ，と言いました．それは，そこで扱われている抽象的な記号が，何かを表しているという確信が持てなくなるからだろう，とも述べました．いわば，それが表している「もの」が見えないという不安です．この「もの不在」の感覚は，初めて抽象的世界に入るときには，必ず感じられるものだと思います．

本来「数」の場合でも，状況は同じであったはずです．2 という数が「そこ」に存在しているわけではありません．それでもなお，数の世界に住んでいる私たちは，その実在感を疑いません．数を一つの「もの」として，安心して認識します．そこにある「それ」が数でないのだとしたら，数は数自身によって定立されなければなりません．数とは何か，と訊かれても「数は数だ」としか答えられないでしょう．しかし，そのような健康的な感覚があるからこそ，数を「もの」として認識し「数存在」の世界に生きることができます．

では（少なくとも現在の）代数学における「もの」とは何でしょうか．それは「集合」です．

集合とは，そもそも「ものの集まり」です．この「集合 = ものの集まり」という認識は，それはそれでとても健康的な認識で，抽象数学においても大事な直観的指針です．しかし，この認識は，集合とは「もの」に依拠した「それ」であるという認識に過ぎません．ベクトル空間という集合がわかっても，それが何を集めたものなのかが依然として問題となってしまいます．

この認識の問題点は「もの」と「集合」を二分法の構図で捉えていることにあります．例えば，次のような状況を考えて見て下さい．集合 S に対して，冪集合 $\mathfrak{P}(S)$ というものがあります．これは S の部分集合全部の集合です．つまり，S の部分集合を「もの」だとして，それらを集めて作った集合，ということになります．この「$S \rightsquigarrow \mathfrak{P}(S)$」という操作は，集合から集合を作る操作の中で，多分，最も基本的で，最も重要なものです．しかし，これを安心して行うためには「もの vs. 集合」という二分法を超えなければならないでしょう．

つまり，集合とは「ものの集まり」であり，同時に「もの」でもある，というアンビバレントな感覚が必要となります．いわば，

$$\text{集合} = \text{もの}$$

が，現在の代数学における世界公式なのです．この理屈を超えた公式を信じることが，現在の抽象代数学の世界に安心して住むための，精神的基盤なのだと思います．

もちろん，だからといって，これが読者の目から鱗を落とすものだとは思えません．日常世界の世界公式「$A = A$」を見れば，誰でも人になれるというわけではないでしょう．上では「信じる」と言いましたが，その信じ方には人それぞれ固有のものがあると思います．個々人の知的な努力にお任せしなければならない点です．

4. 商集合

先ほどは「教えられないこと」について述べました．線形代数の定理は教えられますが，抽象線形代数世界の常識人になる方法は，なかなか教えられません．

しかし，この「教えられること」と「教えられないこと」の，ちょうど境界線上に非常に重要な概念があります．それは「商集合」というものです．

これは代数学の抽象性における最初の難所を，まさに体現したものであると言えそうです．これは理解するのも，教えるのも，どちらもとても難しいものです．

第一，厄介なことに，何が難しいのかなかなか言えません．実際，これはわかってしまえば全く

*4) 例えば，木村敏著『異常の構造』講談社現代新書 331，第 7 章．

簡単で，ほとんど自明なものです．人によってはサッサとわかってしまって，どんどん先に行けることもありますが，わからない人にはトコトンわからないようです．かと言って，それは学力の問題であるとも一概には言えません．

しかし，人間とはやはり不思議なもので，初めの頃は絶望的に苦しんでいた人でも，四年生でセミナーをする頃になると，案外スイスイと使いこなせるようになっていたりします．だからといって，いつかはわかるようになるから心配するな，と授業で言うわけにもいきません．実際，いつまでもわからない人もいるでしょうし，商集合が出るたびに，見る見る学生たちの顔色が白くなったり青くなったりするのも，見ていて大変気の毒です．

どうやらこれにも，数や集合の場合と同様の，何か理屈ではない要素が含まれています．理屈でないことを教えなければなりません．それは悟りのようなものかもしれませんが，私のような煩悩の固まりが学生たちの悟りのお手伝いをするわけにもいかないでしょう．かと言って，滝に打たれてこい，と言うわけにもいきません．

だから教えるほうにとっても，それは苦しみです．私とて何か秘策があるわけではありません．何しろ，それは「簡単なこと」なのです．数学の教員が集まっている場所に居合わせたら，「皆さんは商集合をどうやって教えますか」と吹っかけてみると面白いでしょう．必ずや，大激論が始まるに違いありません．

そもそも，商集合の構成は，ものの集まりをいくつかの部分に類別する，という行いをパターン化したものですが，その際，これらの「類」を「もの」として認識しなければなりません．そして，その心理的基盤は，先に述べた「世界公式」です．

X を集合として，これをいくつかの部分集合 U_α に類別します．ここで α は，これらの部分集合各々についたラベルです．X がこれらの U_α によって類別されているとは，

- X が U_α で覆われていること：つまり
$$X = \bigcup_\alpha U_\alpha,$$
- 異なる U_α と U_β は共通部分を持たないこと：
$$U_\alpha \neq U_\beta \implies U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset,$$

という，二つのことを表しています．

全人類の集合 X は，血液型によって四つの部分集合 U_A, U_B, U_O, U_{AB} に類別されます．しかし「ビール好き」と「ワイン好き」の二つ U_{beer} と U_{wine} には類別されません．ビールもワインも好きでない人もいるでしょうし，私のようにどちらも好きな人だっているからです．

このような類別を与える手段として，同値関係というものがあります．これは X の二つの元の間の関係で，よく $x \sim y$ と書かれるものです．任意の $x, y \in X$ がこの「関係にある」（つまり $x \sim y$ である）とは限りませんが，この「関係」は次の三つを満たさなければなりません：

- 反射律：任意の $x \in X$ について $x \sim x$,
- 対称律：$x, y \in X$ について，$x \sim y$ ならば $y \sim x$,
- 推移律：$x, y, z \in X$ について，$x \sim y$ かつ $y \sim z$ ならば $x \sim z$.

このとき，任意の $x \in X$ について，その同値類というものを

$$U_x = \{y \in X \mid y \sim x\},$$

つまり，x と関係 $\sim$ にある元全体として定義します．すると，この $x \in X$ でラベルがついた部分集合 U_x によって，X は類別されます*5)．

実は，類別を与えることと同値関係を与えることは，互いに同値な操作です．例えば血液型による全人類の類別を与えたかったら，「x と y は血液型が同じ」というのを「$x \sim y$」とすればよいです．

さて，集合 X が，その部分集合 U_α によって類別されているとしましょう．このとき，任意の $x \in X$ について，それが属する U_α を，X の部

*5) ここでわかるように，ラベルの付け方には「ダブり」があるかもしれないことに注意してください．つまり，$\alpha \neq \beta$ でも $U_\alpha = U_\beta$ ということはあり得ます．

分集合としては唯一決めることができます[*6]．ですから，これによって，写像

$$\pi\colon X \longrightarrow \mathfrak{P}(X)$$

を $x \mapsto U_\alpha$（$x \in U_\alpha$）で決めることができます．この写像の像 $\pi(X)$ を，集合 X の類別 $\{U_\alpha\}$ による商集合と言います．類別が上のように同値関係 $\sim$ から決まる場合は，これを

$$X/\sim$$

と書くわけです．そして，その像に値域を制限した写像 $\pi\colon X \to X/\sim$ を標準的全射と呼びます．

つまり，商集合とは，冪集合の部分集合として実現される集合なわけです．抽象代数学の世界において，冪集合を常識的に認識するには，上に述べた代数学の「世界公式」を認めなければならないと述べましたが，商集合の認識も，いわばこの延長線上にあるものです．だから，原理的には冪集合が理解できれば，本来理解できるはずのものです．実際には，なかなかそうはいかないものですが．

5. 安心しすぎも禁物

商集合を教えるときの方便として，この「類」U_x を，例えば $\overline{x}$ とか $[x]$ とか書いて，単なる記号として考えなさい，と言うことがあります．私以外でも多くの人がそう教えていると思います．私は，このことは，実は単なる方便[*7]ではないと思っています．実際，それは「記号」です．それは「数」や「単語」が記号であるのと同じ意味で「記号」なのです．だから，数や単語と同様に，それを使って計算したり，文章を書いたりできます．

実際の授業で，商集合が最初に現れるのは，多分，剰余群や剰余環の定義においてであろうと思います．例えば，整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ を，$m\mathbb{Z}$（m の倍数全体）で「割る」というような状況です．これは類別の言葉を使うと，$\mathbb{Z}$ を

$$m\mathbb{Z}, \quad 1+m\mathbb{Z}, \quad \cdots, \quad (m-1)+m\mathbb{Z},$$

つまり，m で割り切れる全体，m で割って 1 余る全体，m で割って 2 余る全体 $\cdots$ という，m 個の部分集合に類別することです．同値関係を使って述べることもできますが，それは冒頭に触れた「法 m の合同関係」に他なりません．つまり，$\mathbb{Z}$ における関係 $\sim$ として $\equiv \bmod m$ を採用すると，この類別が得られるのです．

こうして得られた商集合が，冒頭にも書いた $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ というものになります．ですから，$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ は m 個の元からなる集合で，その元は $a+m\mathbb{Z}$ という形の，$\mathbb{Z}$ の部分集合です．これを「記号」だと思って $\overline{a}$ と書きます．

大事なことは，これは「計算できる記号[*8]」だということです．実際，この記号の間の和と積を

$$\overline{a}+\overline{b}=\overline{a+b}, \quad \overline{a}\overline{b}=\overline{ab}$$

とすることで，人は安心して計算できるからです．

今，「安心して」と言いましたが，実はここにはちょっとした罠があります．安心する前に，一つ考えておかなければならない点があるのです．今の場合はこれでよいのですが，そのことを踏まえておかないと，近い将来痛い目に遭うかもしれません．抽象的世界に住むには，それなりの注意も必要です．

今の場合，これで定義になっているか，ということが問題です．これは通常，和と積が「well-defined」か否か，と問われる問題です．これをもう少し詳しく説明しましょう．

今，集合 X に同値関係が入っており，商集合 $X/\sim$ が構成されたとします．それとは別に，写像 $f\colon X \to Y$ を考えましょう．今，問題にしたいのは，$\overline{f}\colon X/\sim \to Y$ なる写像で，$\overline{f}(\overline{x})=f(x)$ なるものが，いつ存在するか，というものです．そのような写像 $\overline{f}$ が存在するなら，それは一意的です．というのも，$X/\sim$ の元は，何らかの $x \in X$

*6) ラベル α が唯一決まる，ということではありません．

*7) ちなみに「方便」という言葉はサンスクリット語源で，悟りに近付くための手段という意味だそうです．

*8) 拙著『数学する精神—正しさの創造，美しさの発見』中公新書 1912，第 1 章および 86 頁付近．

で必ず $\overline{x}$ という形をしており，その行き先が $f(x)$ と決まっているからです．ですから，問題は存在するか否かです．

ここで考えなければならないのは「写像が存在する」とはどういうことか，という問題です．写像というからには，$\overline{x}$ の行き先は，一つに定まらなければなりません．しかし，x と y が同じ類に属するなら $\overline{x}=\overline{y}$ ですから，そのためには，$f(x)=f(y)$ でなければなりません．いわば，f が「類の表示 $\overline{x}$ によらず，類のみで決まる」ということが必要です．そして，これは十分でもあります．

$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ における和の場合も，事情は同様です．$\overline{a}+\overline{b}$ は類の間の和です．しかるに，$\overline{a+b}$ は，一見 a,b といった，類を表示する整数の取り方に依存しています．そうではないことを示す必要があるのです．

今の場合，それを示すのは簡単です．ですから，上に定義した和と積で，本当に安心して計算ができます．このように，ちょっと見落とし勝ちな罠が抽象代数学の世界には，時々あります．安心しすぎも禁物ということですね．

よく，上の状況を「この定義は well-defined である」と言うことがあります．私もそう言ってしまいます．しかし，この文章はちょっとおかしいです．これを英語に訳して，さらに日本語に訳し直すと「この定義は良く定義されている」となります．これは何を言っているのかわかりません．

定義の善し悪しなのではなく，定義になっているかが問題なのです．今の場合は，写像が定義されているかに問題の核心があります．ですから，well-defined という言葉が出て来たら，この言葉を使わずに，徹頭徹尾，集合の言葉で言い換えてみるとよいと思います．

6. 代数人になる

今まで，抽象的世界に常識人として安心して住むための心構えについて，主に心理的な面を強調して話してきました．もちろん，それは「戯れ言」です．逆に言えば，これが戯れ言だと，健康的に思えることが大事です．それでこそ，抽象代数学の世界に常識人として住み，代数語を第一言語のように使い，代数記号を数のように操る「代数人」なのだと思います．そして，代数人にとっては，ベクトルとは，もはや単なる「もの」であり「計算できる記号」です．それが抽象代数学の世界の「もの」を表している以上，もはやそれが数や有向線分でなくとも，安心してスイスイ計算できます．

戯れ言を書いた私とて，実際の授業では，上に述べたようなフィヒテ張りの大風呂敷を広げて「世界公式」だのと吹聴することはありません．よく言われることですが，抽象的なことを理解するためには，多くの具体例を体験して，それらのパターンに精通することが大事です．例えば，先に述べた商集合も，実際にいろいろな局面で様々の商集合を扱っていくことで，次第に理解を深めていくものだと思います．だからこそ，そのプロセスは各人各様であり，客観的な手順として宙釣りにはできないものなのです．

しかし，こうした一定の努力の結果として得られるものは，それなりの普遍性と客観性をもった「もの」であり，それらの間の一般的な整合性であるというのは，考えてみればとても不思議です．上では，抽象的世界の常識人にとっては，いかに抽象的であっても「ものの存在」の精神的基盤がある，ということを述べました．その意味で，アラン・コンヌの次の言葉は，これらの人々の気持ちを代弁しているように思えます．

> 「数学的実在の独立的存在性を，作業仮説として受け入れるための代償とは何でしょうか？ いかなる代償もないと，ぼくは思います[*9]．」

（かとう・ふみはる，京都大学大学院理学研究科）

*9） ジャン=ピエール・シャンジュー，アラン・コンヌ『考える物質』（浜名優美訳，産業図書）45 頁．

素粒子物理・弦理論の難所

様々な二重性と双対性



坂井　典佑

1. 二重性と双対性

同一の事象に2つの側面があることを二重性と言う．より一般的に，一つの現象に一見全く異なる属性を持つ2つの側面があり，どちらの見方をとるかで違って見えることを双対性と呼ぶことにしよう．量子力学から始まって，場の理論，さらには弦理論に至るまで，素粒子物理学にはこうした現象が多い．本稿では，素粒子物理学に見られる，様々な二重性，あるいは双対性の例のいくつかを取り上げる．

2. 波と粒子の二重性：湯川理論

相対性理論と並んで，現代物理学の中心的な柱は量子力学である．この量子力学の最も重要な原理は「すべての物質は波動であると同時に粒子である.」という「**波と粒子の二重性**」である．この原理を核力に適用することで，いわゆる湯川中間子（現在ではパイ粒子と呼ばれる）を湯川秀樹博士が予言したのは1935年のことであった．これが湯川の中間子論である．

2つの電荷の間に電気力の伝わる様子を分解してみる．一つの電荷があると，周りの電荷の符号や大きさに比例して電気力が働く．つまり，場所の関数として働く電気力が空間に分布していると見ることができる．これを電場と呼ぶ．同様に電流があると磁気力の場，磁場が生じる．図1のように，電荷が空間的・時間的に変化すれば，電場や磁場も空間的・時間的に変化し振動する．こうした電場や磁場の振動は一種の波なので，電磁波と呼ばれている．この電磁波の波長がメートル程度であれば電波と呼ばれ，もっと短い波長の電磁波は光であったり，エックス線だったりする．原子分子のようなミクロの世界では，電磁波は波であると同時に粒子として振る舞う．このように電磁波が同時に粒子としても振る舞うことが観測されて，量子力学の「波と粒子の二重性」という原理が確立したのである．この粒子を光子と呼ぶ．

1930年代には原子核の構成要素が陽子と中性子であることが分かっていた．この陽子と中性子をまとめて核子と呼ぶ．核子の間に働く核力は，核子を原子の大きさの十万分の一という極めて小さな半径の空間に束縛して原子核を作る．このように，核子は近くに核子があれば互いに核力を及ぼす．すなわち，核子は「核力の場」を周囲に作る．核子が運動すれば，核力の場も空間的・時間的に変化・振動でき，それは波として時空を伝播する．量子力学の「波と粒子の二重性」に従って，湯川

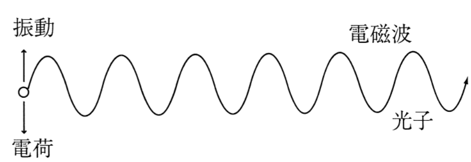


図1　電荷の振動は電磁波を出し，それが光子として観測される．

博士は，この波動が粒子として振る舞うと予言した．湯川博士はこの粒子を中間子と呼んだが，以下では現在の呼び方に従って，この湯川中間子を**パイ粒子**と呼ぶ．

「波と粒子の二重性」を深く追求すると，**ハイゼンベルグの不確定性原理**が得られる．核力の到達距離の実験事実に，この原理を適用して，湯川博士はパイ粒子の質量を予言した．

電磁気力の場合には，一方の電荷が振動して電磁波が出る．これがもう一方の電荷に到達すると，その電荷に力が働く．この逆のプロセスももちろん可能だ．量子力学によれば電磁波は同時に光子という粒子でもある．したがって，2つの電荷の間に光子が受け渡しされて，電磁気力が媒介される．光子は質量を持たないので，それが媒介する電磁気力は遠方に行ってもたかだか距離のべきでしか弱くならない．このような力を遠距離力と言う．

核力は短い距離しか作用しない**短距離力**である．核力の到達距離を l と表そう．核力がなぜ短距離しか到達しないのかを理解するために，「波と粒子の二重性」の原理を使って考察する．電磁気力の場合と同様に，核力の場合も核力を媒介するパイ粒子が一方の核子から放出され，もう一方の核子に吸収されて核力が生じる（図 2 参照）．核力を媒介するパイ粒子が有限の質量 m を持つとしてみよう．核子が余分にパイ粒子を放出するとすれば，それら 2 粒子状態のエネルギーは核子 1 個よりも大きくなり，エネルギー保存則に反する．このエネルギー保存則の破れは少なくともパイ粒子の静止エネルギー $\Delta E = mc^2$ 程度になる．しかし，量子力学の「不確定性原理」によると，エネルギーの不確定性 ΔE と観測時間 Δt との積は

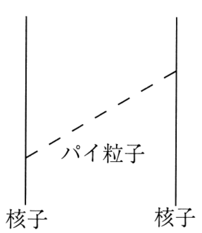


図 2　核力はパイ粒子の交換によって媒介される．

プランク定数 $\hbar$ よりも大きい．したがって，

$$\Delta t \approx \hbar/\Delta E \approx \hbar/(mc^2) \qquad (1)$$

程度の短時間であれば，パイ粒子の存在が許され，エネルギー保存則に矛盾しない．このように，一時的に生じて短時間の後に消滅する粒子のことを**仮想的粒子**と呼ぶ．

この仮想的パイ粒子の交換によって核力が媒介される．仮想的粒子でも光より早くは走れないから，時間 Δt の間に光速度で到達できる距離 Δr が，仮想的粒子の影響の及ぶ範囲である．したがって，質量 m のパイ粒子が媒介する核力の到達距離は

$$\Delta r \geq c\Delta t \approx c\hbar/(mc^2) = \hbar/(mc) \qquad (2)$$

となる．この距離をパイ粒子の**コンプトン波長**と呼び，パイ粒子の量子力学的な広がりを与える．実験からわかっている核力の到達距離は 10^{-13} cm 程度だった．これがコンプトン波長 $\hbar/(mc)$ に一致すると仮定して，湯川博士はパイ粒子の質量を電子の 200 倍程度だと予言した．このパイ粒子が実際に予言どおり発見された．さらにそれ以後，次々と新しい粒子が発見され，湯川理論は素粒子物理学の出発点となった．

3. 無限自由度の双対性：ソリトン

量子力学と異なり，量子系の中でも場の理論は無限自由度を持つことが特徴である．量子系一般に共通する「波と粒子の二重性」だけでなく，場の理論には**無限自由度系**として特徴的な新しい双対性がある．

例として，場の理論でのソリトン解の間の双対性を取り上げよう．スカラー場の値が異なる 2 つの離散的な基底状態（真空）がある場合を考える．一方向の左と右の無限遠で，異なる真空に帰着するソリトン解は 2 つの真空領域（ドメイン）を隔てる壁になっているので，**ドメイン・ウォール**と呼ばれる．これは 1 次元的な空間依存性を持つソリトン解であり，図 3 のように，エネルギーが壁

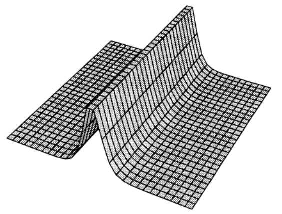


図 3　エネルギーが壁状に局在するドメイン・ウォール．

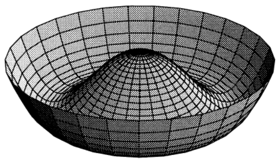


図 4　ヒッグス・スカラーのポテンシャル．

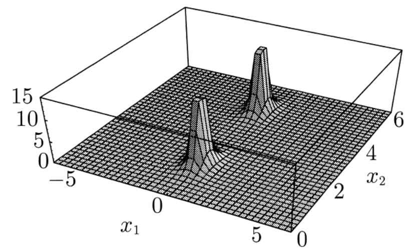


図 5　周期的に置かれたボーテックスのエネルギー密度．

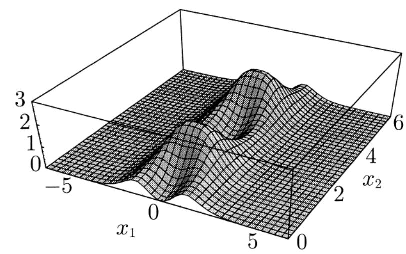


図 6　ボーテックスが重なり始めるとドメイン・ウォールが見えてくる．

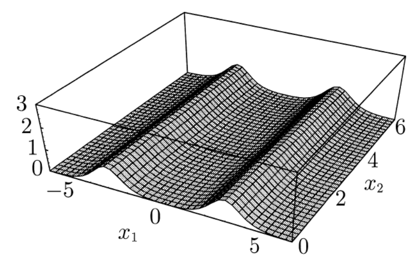


図 7　重なったボーテックスはドメイン・ウォールとなる．

状に局在する．

2 次元的な空間依存性を持つソリトン解としてボーテックスがある．ボーテックスの具体例を見るために，ゲージ場とそれに結合するスカラー場からなる理論を考える．図 4 に示すように，スカラー場が零でない値を持つほうがエネルギー的に安定となるポテンシャルがあるとする．このように基底状態（真空）で値を持つスカラー場をヒッグス場と呼ぶことにする．また，ヒッグス場が真空期待値を持つ場合，この系は**ヒッグス相**にあると言う．

ヒッグス相では，ゲージ対称性が破れている．最も簡単な場合は，電磁気学と同じく，$U(1)$ ゲージ群の場合である．電磁気のゲージ対称性が自発的に破れた状態が良く知られている超伝導状態である．超伝導状態では，磁場は存在できない．もしも強力な磁場を無理にかけると，超伝導状態の破れる場所が生じ，そこだけを磁場がようやく貫通できる（マイスナー効果）．超伝導状態が壊れた小さな場所だけに絞られるので，磁場は細い束になる．これが**ボーテックス**である．ボーテックスの周りにはベクトルポテンシャルの渦ができているので，ボーテックスを渦糸とも呼ぶ．

ボーテックスは一種の渦なので，ボーテックスは 2 次元的な断面を持つソリトンである．ここで，この断面の 2 次元のうちの一つの方向 x_2 について，周期的境界条件を課してコンパクト化を行ってみよう．すなわち，

$$x_2 \sim x_2 + 2\pi R \tag{3}$$

と周期的な同定を行う．これは図 5 のように 2 次元面上（の x_2 方向）に周期的にボーテックスを置いたのと同じである．

もしもボーテックスの太さに比して周期性 $2\pi R$ が十分大きければ，コンパクト化しないのと同じである．しかし，逆にボーテックスの太さのほうが周期性 $2\pi R$ よりも大きい場合には，隣り合う基本領域に置かれたボーテックスどうしが重なり合う．図 6 に示したように，ボーテックスどうしが重なり合うようになると，徐々に壁が見え始め，

すっかり重なると図7のようにドメイン・ウォールそのものが出現する．無限個のボーテックスを足し合わせると，ドメーン・ウォールが生じる．これらの図は，超対称ゲージ理論を用い，超対称性が半分保存されるソリトンを構成して描いたものである[1]．数学的には，この機構はポアソンの和公式に関係付けることができる．

場の理論では，この他にも，双対性のいろいろな例がある．例えば，2次元でのボソン場での記述とフェルミオン場での記述とが等価となる場合も，双対性としてよく調べられている．

4. 弦理論：s-t 双対性

重力を含む統一理論の最有力候補は超弦理論である[2,3]．場の理論のように，有限種類の場だけの理論でも，時空が無限なので，無限自由度になっている．しかし，弦理論は，無限種類の場を含む理論と考えることができるので，さらに新しい弦理論特有の様々の現象がある．以下では弦理論特有の双対性のいくつかを紹介しよう．

もともと弦理論は強い相互作用をする粒子，ハドロンの散乱振幅を記述するために考案されたものであった．その場合にすでに発見されていた性質として，s-t 双対性というものがある．

弦とは1次元的に広がった物体だが，**開いた弦**と**閉じた弦**の2種類がある．開いた弦とは両端に端のある弦のことである．閉じた弦とは端がなく1周すればもとに戻ってくる弦のことである．

弦の振動の節が多くなればなるほど振動は激しく，エネルギーが大きくなる．弦の重心が静止していれば，振動エネルギーが弦のもつ静止エネルギーとなっている．孤立した弦が振動しながら全体として動けば，ある運動量とエネルギーを持った孤立した「粒子」として見える．粒子として観測される質量は，重心が静止しているときのエネルギーのことだから，弦の振動エネルギーに他ならない．このように，弦の様々の振動状態は，振動エネルギーだけの質量をもった様々の粒子として観測される．量子力学によれば，振動子のエネルギーは離散的な値に量子化される．そのために，弦の振動エネルギーも量子化されて，離散的な値になる．これらは弦の固有振動に対応し，固有振動は無限種類ある．したがって，**弦は離散的な質量をもつ無限種類の粒子（＝ 場）を含む**．

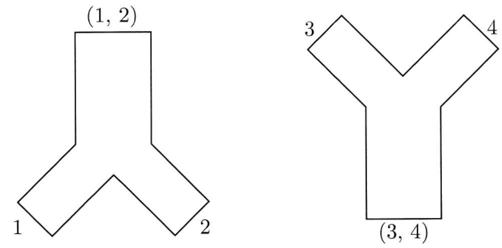


図8　弦の相互作用の例．

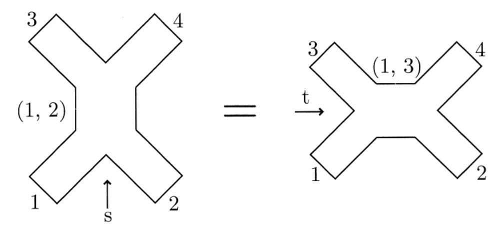


図9　散乱振幅はsチャネルの共鳴状態の和であるが，同時にtチャネルの粒子交換の和でもある．

弦は1次元的に広がった物体で，それが運動する軌跡は時間・空間の中での2次元的な面となる．これを**世界面**と呼ぶ．**弦の相互作用**は**純粋に幾何学的**なものだけである．例えば，開いた弦の相互作用は，図8のように弦の端がくっついたり離れたりして起こる．このおかげで，弦が広がった物体であるにも関わらず，弦理論が因果律などに矛盾しない良い理論になっているのだとも言える．

まず，2つの開いた弦1, 2が散乱して2つの開いた弦3, 4になる場合を考えてみよう．この散乱に対応する世界面を図9に表した．1, 2の弦の入射するチャネルを**sチャネル**と呼ぶ．1, 2の弦が合成されて新しい一つの開いた弦(1, 2)になるので，合成された弦に対応する様々な粒子状態が中間状態として生じるはずである．これらの粒子は高次の相互作用で崩壊できるので，実際には散乱断面積に大きなピークを生じる共鳴状態として比

較的低いエネルギーではっきりと観測されることになる．これに対して，入射エネルギーが高くなると，大変多くの共鳴状態が重なり合って寄与してくるので，ピークは見えず，むしろ，弦 1, 3 の間に「交換される仮想的粒子」という描像のほうが適切になる．交換されるのは 1, 3 が合成されて生じる開いた弦 (1, 3) である．1, 3 のチャネルを **t チャネル**と呼ぶ．

弦理論では，s チャネルに生じる様々な共鳴状態の平均的振舞いが t チャネルに交換される仮想的弦によってよく記述される．すなわち，両者による記述は同等である．詳しく見ると，弦理論では，s チャネルの状態の無限和をとった振幅と，t チャネルの状態の無限和をとった振幅とが全く同等になる．この現象を **s-t 双対性**と呼ぶ．

ここでは開いた弦で s-t 双対性を見たが，閉じた弦でも全く同様に成り立つ．

s-t 双対性では，s チャネルの無限個の粒子の和と t チャネルの無限個の粒子の和が等価になる．これは弦理論の性質であるが，一面で，無限個のボーテックスが重なるとドメイン・ウォールになるという，前節で見た場の理論のソリトンの場合の双対性と似ているとも言える．これに対して，弦理論でなければあり得ない新たな双対性を次に紹介しよう．

5. 弦理論の T 双対性

外力を受けないで運動している弦は，できるだけ「まっすぐに」張られようとする．つまり端（境界）を指定したとすると，その境界の間に張られる世界面の面積が最小になるようなものが，実際に実現する弦の運動ということになる．これを実現するには，世界面上の作用が世界面の面積に比例すると仮定すればよい．

簡単のために，平坦な時空の中で運動している閉じた弦を考えよう．時空間の座標 X^μ を世界面上の座標 t, σ の関数とすると，弦の運動が記述できる．2 次元世界面上に導入した座標 t, σ は我々が世界面を記述するための便宜に導入しただけのものだから，結果がその座標の付け方によって変わってはいけない．すなわち，世界面上の一般座標変換に対して不変でなければならない．このような場合には，アインシュタインの一般相対性理論の例にならって，世界面上に計量 $g_{\alpha\beta}$ を導入して記述するとよい．弦の世界面上の作用が世界面の面積に比例することを具体的に表現すると

$$S_{弦} = \frac{T}{2}\int dtd\sigma\,\sqrt{g}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu. \quad (4)$$

ここで，$\alpha, \beta = 1, 2$ は世界面上の座標 (t, σ) を表し，計量の行列式を $g = \det g_{\alpha\beta}$ と書いた．比例係数 T は弦が運動しながら振動するときに，時空間でどのくらい曲がりにくいかを表す量で，**弦の張力**という物理的意味を持つ．T は弦理論の基本パラメターであり，我々の時空の座標 X^μ の逆数の 2 乗の次元を持つ．したがって，**弦の長さの基本スケール** $l_{弦}$ を，

$$l_{弦} = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \quad (5)$$

で定義する．一方，2 次元世界面上の場の理論として考えると，この弦理論の作用にはスケールが全くない．すなわち**スケール不変性**がある．

2 次元面の計量は，適切な一般座標変換を行うと局所的には

$$g_{\alpha\beta} = \mathrm{e}^{\rho(t,\sigma)}\eta_{\alpha\beta} \quad (6)$$

という形に必ずできることが知られている．この形は平坦な計量 $\eta_{\alpha\beta}$ に局所的（座標 t, σ に依存する ρ で）スケール変換を行った形である．これによって一般座標変換の自由度はゲージ固定されたことになるので，この形の計量を共形ゲージの計量と呼ぶ．このとき作用は

$$S_{弦} = \frac{T}{2}\int dtd\sigma\,\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu. \quad (7)$$

したがって，2 次元世界面上での運動方程式は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2}\right)X^\mu = 0 \quad (8)$$

となる．

弦理論固有の双対性は空間がコンパクトになっ

た場合に生じる．例えば一つの方向 X が半径 R の円周上にコンパクト化されているとしよう．

$$X \sim X + 2\pi R. \tag{9}$$

閉じた弦を考えているので，世界面の空間方向のパラメター σ が一方の端 0 からもう一方の端 π まで走ったとき，X は 1 周して，もとと同じ空間点に戻る必要がある．しかし，X 方向は $2\pi R$ ずれても同じ点なので，

$$X(t,\sigma+\pi) = X(t,\sigma) + 2\pi R w. \tag{10}$$

ここで w は整数で，何回円周に巻き付いたかを表しているので，**巻き付き数**と呼ぶ．

運動方程式 (8) の一般解は

$$X(t,\sigma) = X_{\mathrm{L}}(t+\sigma) + X_{\mathrm{R}}(t-\sigma), \tag{11}$$

$X_{\mathrm{L}}, X_{\mathrm{R}}$ はそれぞれ $t+\sigma, t-\sigma$ だけの関数で，左行き，右行きの波を表している．周期的境界条件 (9) を満たすためには，$X_{\mathrm{L}}, X_{\mathrm{R}}$ は周期関数であれば良い．運動方程式が 2 階の微分方程式なので，周期関数以外には，座標 t,σ の 1 次式が可能なだけである．

$$X_{\mathrm{L}} = x_{\mathrm{L}} + (t+\sigma)p_{\mathrm{L}} + \text{周期関数}, \tag{12}$$
$$X_{\mathrm{R}} = x_{\mathrm{R}} + (t-\sigma)p_{\mathrm{R}} + \text{周期関数}. \tag{13}$$

(11) 式にあるように，$X_{\mathrm{L}}, X_{\mathrm{R}}$ の和が時空の座標 X だから，X の中の σ に比例する項 $(p_{\mathrm{L}} - p_{\mathrm{R}})\sigma$ は，σ が π 増えたときに $(p_{\mathrm{L}} - p_{\mathrm{R}})\pi$ 増えるので，(10) 式の巻き付き数 w を与える．

$$(p_{\mathrm{L}} - p_{\mathrm{R}})\pi = 2\pi R w, \quad w = \text{整数}. \tag{14}$$

一方，X の中の t に比例する項 $(p_{\mathrm{L}} + p_{\mathrm{R}})t$ は弦の併進運動を表している．したがって

$$p = p_{\mathrm{L}} + p_{\mathrm{R}} \tag{15}$$

は弦の**重心運動の運動量**である．(9) にあるように，弦の運動する空間 X は周期的なので，その方向の運動量は半径 R の逆数で量子化される．

$$p_{\mathrm{L}} + p_{\mathrm{R}} = \frac{n}{R}, \quad n = \text{整数}. \tag{16}$$

まとめると，閉じた弦の座標には t,σ に比例する項があり，それらはそれぞれ運動量，巻き付き数という物理的意味を持つ．しかも，運動量の項は半径 R の逆数で量子化され，巻き付き数の項は半径 R に比例して量子化されている．

このように，閉じた弦では，t,σ の座標を入れ替えることは，運動量と巻き付き数を入れ替えるのと同じになる．ここでは周期的な項の寄与は吟味しなかったが，実は，高次の量子効果まで含めて，弦理論の理論形式全体が，運動量と巻き付き数の入れ替えに対して対称であることがわかっている．巻き付き数と運動量の量子化の単位はコンパクト化の半径 R とその逆数 $1/R$ だから，巻き付き数と運動量の入れ替えは，時空で見ると，空間の半径 R とその逆数の入れ替えになる．もちろん，これら 2 つの長さを比べる単位が必要だが，それは (5) 式に与えた弦の基本の長さのスケール $l_{\text{弦}}$ で与えられる．したがって，

$$R \to \frac{l_{\text{弦}}^2}{R} \tag{17}$$

の変換の下で，弦理論は同じ理論を与える．この対称性を **T 双対性**と呼ぶ．

超弦理論は重力を含む統一理論の最有力候補である．量子効果が重要でない長距離スケール，あるいは低いエネルギーで見ると，重力は一般相対性理論でよく記述されている．しかし，一般相対性理論では，ブラックホールの中心などの極めて重力が強くなった領域，すなわち強く曲がった領域で，特異点が生じるなどの困った問題が起こる．これに対して，弦理論では，弦の基本的な長さのスケール $l_{\text{弦}}$ を境に，極めて小さな半径 R の空間は極めて大きな半径 $l_{\text{弦}}^2/R$ の空間と等価である．したがって，弦理論では，強い重力場や強い曲率のある空間での，特異点などの困難な問題が自然に解決されているのではないかと期待される．T 双対性はこの意味で，弦理論の新しい興味深い性質であり，量子重力の解明に大きな意義を持つ可能性がある．

この他にも，弦理論には興味深い双対性がいく

つも発見されている．例えば，結合定数が小さい場合と大きい場合とがつながっていることが発見され，これはS双対性と呼ばれている．さらにコンパクト化して得られるT双対性が，このS双対性と組み合わさった場合にはU双対性と呼ぶこともある．特に，弦理論では，Dブレーンと呼ばれる広がった物体が存在する．これはソリトンと考えることもでき，弦理論の非摂動効果の理解に本質的な役割を果たしている．これを用いることによって，重力理論とゲージ理論の間の双対性が発見された．この発見は，今まで解くことができなかったゲージ理論の強結合の問題を解決する可能性を与えている．

参考文献

1) M. Eto, T. Fujimori, Y. Isozumi, M. Nitta, K. Ohashi, K. Ohta and N. Sakai, "Non-Abelian vortices on cylinder: Duality between vortices and walls," *Phys. Rev. D* **73** (2006) 085008 [arXiv:hep-th/0601181].
2) 超弦理論の和文入門書・解説書としては，太田信義著，『超弦理論・ブレイン・M理論』シュプリンガー・ジャパン，2002.
3) 超弦理論の本格的で標準的な教科書の和訳は，ポルチンスキー著，伊藤克司・小竹悟・松尾泰訳，『超弦理論 I, II』シュプリンガー・ジャパン，2006.

（さかい・のりすけ，東京女子大学文理学部）

幾何学の難所

太田 啓史

1. はじめに

幾何学では，空間・図形を研究します．もう少し広げて言うと，空間・図形に付随して出てくる様々な対象を研究します．では，そもそも空間とは何でしょうか．空間・図形を研究するとは，どのように，また，何がわかったらわかったとするのでしょうか．

2. 目に見えない空間

大学に入学すると，普通，1年間くらいは数学の授業として微積分と線形代数を習うことが多いです．大学によっても異なるでしょうが「幾何学」と名のつく講義は数学科に進学するまでなかなかないのではないでしょうか．小学校の頃を思い出しますと，三角形や四角形，円などを学び，中学高校では，ユークリッド幾何や，様々な関数のグラフなども学びます．たいてい，絵に書けるものが扱われる図形です．絵に書くことで，その図形を実際に目で見ることができます．

大学1年生の微積分や線形代数の授業で，しばしば学生の人が戸惑いを感じることの一つに，n 次元ユークリッド空間があります．$\mathbf{R}^n$ なんて書くやつです．せいぜい3次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ なら目で見えるのでわかった気がしますが，4次元5次元なんてSFでもあるまいし，まして n 次元なんてさっぱり見えません．普通の人は頭の中で想像することすらできません．ああ，見えないからわからない．最近でこそ，そんなことで学習の障害になっては困る，という老婆心で1年生の間は3次元までにしておきましょう，などという風潮もあったりします．これは翻って言えば，3次元でわかればあとは大体同様なのですよ，という教えなのです．3を n と変えるだけなのです．逆に n 次元と言われて戸惑うようであれば，$n=3$ と思って想像してみるというのも一つの手です．実際プロの数学者でも，3次元より大きい次元の空間が，手にとるように見える人はいないわけではないようですが，稀であり，多くの人は次元の低い場合にモデル化して想像しているように思います．そうしてみると，いちいち3とか2とか書いていると面倒になり，汎用性のある n と書いておくのが結局便利，ということになってきます．また，「次元」の「差」に注目する，というのも一法かもしれません．3次元ユークリッド空間の中の2次元平面は，残った次元の「差」が $3-2=1$ です．n 次元ユークリッド空間の中の $n-1$ 次元ユークリッド空間というのは，おおむねそんなものを頭に想像していればよいと思います．実際，そのような $n-1$ 次元ユークリッド空間は超平面という名で呼ばれています．実際に見えないから理解できない，と投げ出すわけではなく，**見えないものをどう理解し表現していくか**，ということが幾何学の一つの目標のように思えます．

3.「入れ物」のない空間

高校までに出てくる図形は，絵が書けます．紙を2次元平面の一部と思ってその中に直線や曲線を描いたり，また紙の上に3次元の空間の絵を書いてその中の平面であったり曲線や曲面を描いたりします．いずれにせよ我々は，その絵が書かれていない，遠くの「外」の空間から眺めることによって，図形を見ています．図形なり空間を理解しようとするとき，人間の頭の中ではどうしても，その図形なり空間は**ある別の大きな空間に入っていることを暗黙のうちに想定し**，それを外から眺める，と認識しがちです．俯瞰するというわけです．落語の一つで，朧げな記憶ですが，次のような話を聞いたことがあります．八っあん（筆者注：くまさんだったかもしれない）が，思い悩んで長屋のご隠居さんを訪れ質問します．

八っあん「ご隠居．この世界をどんどんどんどん行くてぇと，一体全体どこに行くんだい？ 考え出したら夜も寝られなくなっちまって困ってるんでやんす.」

ご隠居「... 断崖絶壁になっていて，それはそれは，大きな大きな滝があるところに着く.」

八っあん「その大きな大きな滝を越えて行くと，その先には一体全体何があるんだい？」

ご隠居「それより先は越えられない.」

八っあん「それより先は越えられないっていったって，冗談言っちゃあいけねぇよ，ご隠居．滝が流れていくんだから，その川にいる魚なんてぇのは，その先一体全体どこへ行くんだい？ 鳥なんかだったら，ピューって飛んでいけらあなぁ.」

ご隠居「...... もうもう（筆者注：魍魎だったかもしれない）としたところに着く.」

八っあん「じゃあ，そのもうもうとしたところの先には何があるんだい？」

ご隠居「........ もっともっともうもうとしたところに着く.」

八っあん「じゃあ，そのもっともっともうもうとしたところの先には何があるんだい？」

という具合に話が続くわけです．（残念ながら話のオチを忘れてしまいました.）大航海時代のヨーロッパの人々とて八っあんの気持ちと似たようなもので，世界一周して帰ってきた暁には感慨ひとしおではなかったかと思います．しかし，これでわかることは地球には「はし」がない，ということで，地球の「入れ物」としてその外に「銀河系」があり，その外に「宇宙」という空間が用意されています．八っあんがいれば,「じゃあその『宇宙』とやらの外には何があるんだい？」と聞くことでしょう．

そもそも，**空間というものは，何か入れ物の空間を考えないと理解できないものなのでしょうか．** 19世紀にリーマン（Riemann, 1826–1866）は，今日「多様体」と呼ばれる空間概念の一つを提唱しました．これは上の疑問に答えるもので，多様体の概念の獲得というのは，歴史上革命的な出来事の一つと言っても過言ではないと思います．人類が多様体の概念を獲得してから，まだ百数十年しか経っていないのです．多様体は，局所的にはどこもユークリッド空間と同じに見えますが，それら局所的には単純な空間が「貼り合う」ことで多様体が定義されます．局所的に易しいものを貼り合わせて大域的に複雑な空間を捉えるという思想です．局所的に見ていては多様体はみな同じです．「貼り合わせ」方の違いによって様々な空間（多様体）を考えることができるのです．従って，多様体を考えるときには，それが入っている入れ物の空間というものを一切考える必要はありません．**空間が空間として自立して捉えられる**わけです．大域的な一つの座標で空間が記述される必要は全くありません．

多様体については，数学科の3年生くらいで習うのが普通でしょう．多様体の考え方を初めて習ったとき，面喰らうかもしれません．大学に入って幾何学を勉強しようとしたとき出会う一つの難所かもしれません．しかし，それはここで延々と書いてきた通り革命的な思想転換であり，慣れないうちは仕方がないことかもしれません．慣れてしまえば，非常に透明な考え方で自然なものであると了解できると思います．そうは言っても，多様体あるいはそれに付随する種々の対象の定義の意

味を理解したとしても，いざ，それを実際に局所的な座標と貼り合わせのデータで全部具体的に書き下すことによって表現しようとすると，結構煩雑になったりして大変な作業になることがままあります．それは，入れ物の空間を一つとって大域的な座標で記述するという道を捨ててしまった以上仕方がないことです．局所的データとその貼り合わせデータで大域を理解する，という考え方は多様体に限らず現代数学の典型的思考形態の一つだと言えます．**空間概念・定義の獲得は，幾何学の大きな目標の一つです．**

残念ながら，先の落語のオチが多様体，というわけではなかったと思いますが，それどころか，次のようなことが成り立つことが知られています．先に述べた通り，多様体を定義するのに入れ物の空間は一切必要ないのは確かなのですが，実はいつでもある十分高い次元のユークリッド空間の中に埋め込めてしまうのです．これは多様体の上に十分豊富に関数が存在するという基本的な事実と表裏一体のことなのですが，ユークリッド空間という入れ物がなくとも多様体は多様体として自立して存在していたはずが，やっぱり大きなユークリッド空間にすっぽりと包まれていた，というのはなんともお釈迦様の掌の上，という印象は否めません．しかし，多様体全般に対して何かを議論する場合，高い次元のユークリッド空間の中に埋め込めるという事実は非常に有効でかつ根源的な意味で重要なステップになっていることがあります．有名なものに，ポントリャーギン・トム（Pontrjagin–Thom）構成と呼ばれるものがあります．詳しくは例えば文献 1) などを御覧下さい．

いずれにせよ，ユークリッド空間の中に埋め込むことができる，ということとユークリッド空間に埋め込まなくても空間として認識できる，ということの発想の転換は大変大きなものだと思います．

4.「同じ」ということ

今までの話でひとつ大切なことを不問にしています．それは「同じ」ということです．図形・空間が同じ，ということはどういうことでしょうか．この問いは当たり前のようでいて，考え出すと存外深い問題です．もっとも素朴に考えると，図形や空間は「点」の集まりですから，2 つの図形が「同じ」ということは，それぞれの点どうしが一致する，という意味に解釈することです．この立場は実に明解で結構なのですが，全く「同じ」ものでなければ「違うもの」としてしまうのであまりにも厳しすぎます．例えば，図形や空間を分類しようとしたときには，点集合として違うものは違うことになってしまいますから，分類するということ自体大して意味をなさなくなります．

小学校や中学校で三角形の合同というのを習いますが，これも「同じ」ということの一つの立場を与えます．もう少しゆるめて相似という概念がありますが，これもまた「同じ」の一つの尺度となります．「正三角形」というのは「合同」という立場で分類すると，辺の長さだけで区別され完全に分類されます．「相似」という立場では，正三角形はみな「同じ」ということになります．このように，「同じ」という概念はいろいろとあり得ます．数学ではこのような関係を「同値」と呼びます．厳格に言えば，**最初に述べた厳密な意味で「同じ」ということと「同値」ということを明確に区別する**必要があります．

あらゆる数学の場面で，「同値」という概念が出てきます．幾何学に限らず，数学の典型的な問題形態として，ある「同値」なもので分類した「同値類」を理解せよ，ということにしばしば遭遇します．例えば，解析であれば，ルベーグ積分で出てくる L^2 空間の要素というのは，正確に言えば関数そのものではなく関数のある同値類です．代数であれば，ベクトル空間や群の同型という概念はそれぞれ「同値」の考えであり，同型なベクトル空間や群は同一視されます．

では，空間の間の「同値」はどう定義すればよいのでしょうか．これにはもちろんいろいろな立場があり得ます．考えている空間のどのような幾何学的構造に注目したいか，によって同値の尺度のひき方が変わるはずです．先に述べたように合

同を尺度に図形を考察するのか，相似を尺度に図形を考察するのか，といった具合です．同値の尺度の違いによって，それぞれの同値に対して数学的な問題を各々たてることができます．言ってみれば，同値の尺度を変えれば変えただけ，新しい問題が派生します．「**数学は，論理的に正しければ何をやっても構わないが，何をやっても数学になるわけではない**」，という類いの言葉を聞いたことがあります．「よい同値」の概念を見つけ出すことが肝要になってきます．しかしながら，この「よい」というところに恣意性があり，くせものです．粗すぎず細かすぎない適度な同値というあたりがよさそうなところですが，中々その程度を見極めるのは難しいです．

普通，図形や空間を扱うとき，我々はそれを単なる点の集合と見るわけではなく最低限何らかの「位相構造 (トポロジー)」というものを付加して考えます．「長さ」や「角度」といった構造は日常的にも馴染み易い概念でしょうが，位相構造というのは，初めて学ぶとき難所の一つになるかもしれません．一体，位相構造を付加して考える必要がどこにあるのでしょうか．図形や空間の性質を調べるとき，もっとも素朴に区別されるべき構造として，例えば，その図形はつながっているか否かという性質をあげることができるのではないでしょうか．位相構造をもった 2 つの空間が，一方の空間はつながっているがもう一方はつながっていないとき，2 つの空間はある同値の尺度で比べたとき違うと結論したい，というのは自然な考えでしょう．そのためには，2 つの空間の間に「連続」な写像という概念が必要となってきます．遡って連続な写像という概念を定義するために，空間に位相構造というものを考える必要が出てきます．そして，同値の尺度の一つとして「同相」という概念に行き着きます．数学では以下のように定式化されます．2 つの位相空間 X と Y が同相である，というのは，X から Y へのある全単射（上への 1 対 1 写像）で連続な写像 $f: X \to Y$ が存在し，f の逆写像も連続であるときを言います．このとき，f は同相写像と呼ばれます．「同相」という同値関係は，最初に述べた厳格な意味で「同じ」という関係に比べてはるかにゆるやかな関係です．まず，X と Y は集合として一致している必要は何もありません．空間のつながり具合のようなゆるやかな性質は区別しますが，長さや角度などについては何も問うていません．そもそも，考えている空間に長さや角度の概念が存在しないような空間を考えてもよいのです．直感的には，ひっぱって伸ばしたり縮めたりしてもよいが，穴をあけたり切ったりしてはいけないという操作で移り合うとき，同相であるということになります．例えば，三角形はすべてみな同相になります．もっと言えば，角度なんてものは尺度に入っていませんから，三角形でも四角形でも円周でもみな同相になります．しかし，円周と線分は同相にはなりません．日常生活では違うと思っているいろいろな図形を同じものとしてしまうこんなゆるい同値の尺度なんて導入しても仕方がないじゃないか，と言う方がおられるかもしれませんが，ところが世の中そんなに甘くはなく 2 つの位相空間が同相であるか否かというのを判定するのは大変難しいことが多いのです．例えば，次元の違う 2 つのユークリッド空間が同相でないということですら，それほど自明なことではありません．

また, 位相空間 X と Y はある種の滑らかさの構造をもっているとすると, その間の写像 $f: X \to Y$ が滑らか，即ち微分可能であるか否かを問うことができます．「同相」の定義において「連続」を「微分可能」に置き換えた同値関係を「微分同相」と言います．微分可能写像は連続ですから，微分同相ならば同相ですが逆は必ずしも正しくありません．それぞれの「同値」に応じて，深い幾何学の理論が展開されます．その一部は先にも挙げた文献 1) で見てとることができます．結果的に，これらの同値の尺度は，豊かな数学を生み出したという意味で「よい同値」の例と言ってよいでしょう．

更に，同相よりももっとゆるやかな同値として，ホモトピー同値という概念があります．2 つの連続写像 $f, g: X \to Y$ がホモトピックであるとは，連続写像 $H: [0,1] \times X \to Y$ で

$H(0,x)=f(x), H(1,x)=g(x)$ となるものが存在するときに言います．つまり，2つの写像 f,g は連続写像の族 $H(t,\cdot):X\to Y$ を通してつながっており，連続的に変形していける，ということです．位相空間 X と Y がホモトピー同値であるとは，連続写像 $f:X\to Y$ と $g:Y\to X$ が存在して，合成 $g\circ f:X\to X$ および $f\circ g:Y\to Y$ がそれぞれ恒等写像 id_X, id_Y にホモトピックになることを言います．$g\circ f:X\to X$ および $f\circ g:Y\to Y$ がそれぞれ恒等写像 id_X, id_Y にホモトピックでなく本当に等しいときが同相でした．従って，ホモトピー同値のときは f や g は互いに逆写像である必要はなく，f,g は全射でも単射でもある必要はありません．（ホモトピー逆写像と呼ばれます．）逆写像は存在すれば，一意に決まりますが，ホモトピー逆写像というのは写像に対して一意に決まるものではありません．ホモトピー同値はかなり大雑把で大らかな同値関係と言えますが，幾何学においてはいろいろな場面で非常に重要な考え方の一つになっています．それに関連することを次の節で少しだけ触れることにしましょう．

5.「同一視」の仕方の不定性 ——対称性とそのホモトピー

どういう意味の同値であれ，2つの位相空間 X,Y が同値であったとしましょう．例えば同相であったとしましょう．同相であるものを同一視して考える立場では，このような2つの位相空間は「同じ」とみなすことになります．しかし，「同値」の同一視の過程で注意しなければならないことは，その同一視の仕方は一意的ではないということです．すなわち，$f:X\to Y$ という同相写像 f は一通りではなく，いろいろあり得ます．X と Y はともかく同一視したのだからその同一視の仕方なんて忘れてしまえ，というのも一つの考え方でしょうが，同一視の仕方を覚えておくことはより詳しい情報をキープしているわけですから，何か我々に教えてくれるはずです．**同一視の仕方がたくさんあるということは，その空間が大きな対称性をもっていることを意味します．**対称性は空間の重要な性質です．しかし一方で，二通りの同一視の仕方があったとき，それらの関係を議論する必要が出てきます．4節では2つの空間が「同じ」とはどういうことか，ということを考えましたが，今度は2つの同相写像（同値写像）が「同じ」とはどういうことか，という問題を考察する必要が出てきます．前と同様に，写像として厳格に等しいときのみ2つの同相写像は「同じ」と考える立場もあり得ます．これでは同値写像の集合が大き過ぎる場合があります．このとき適当な「同値」で再び割ることを考えなければなりません．一つの答えは，4節で述べた「ホモトピー」という考え方です．即ち，2つの同値写像すべてを考えるわけではなく，互いにホモトピックなものは「同値」とし空間の同値写像の集合を「小さなサイズ」に縮めることがしばしば行われます．

そうすると，次に問題となるのは2つの同値写像の間のホモトピーの取り方も一意ではないということです．つまり，空間の間の2つの同値写像がホモトピックであったとしてそのホモトピー写像 H の取り方には不定性が残ります．ですから，今度は2つのホモトピー H_0, H_1 があったとき，そのホモトピーは互いにホモトピーかということを問わなければなりません．**ホモトピーのホモトピー**です．どうやら八っあんとご隠居の会話の再現のような感じになってきました．しかし，これは落語の世界の話ではなく現実の数学の話です．実際，もうもうとした世界に入ってきて頭が痛くなってきますが，このようなある種の**無限階層のホモトピー構造**は現代数学でもしばしば見受けられる構造の一つで，現在でも活発に研究されています．

空間を理解しようという営みは未だ尽きません．

参考文献

1) 田村一郎，『微分位相幾何学』（岩波書店）．

（おおた・ひろし，名古屋大学大学院多元数理科学研究科）

熱・統計物理の難所
エントロピーとエルゴード仮説など

和達　三樹

1. はじめに

レコード鑑賞に凝っていたときに経験したことがある．友人と2人でクラシック音楽を聞いていたのであるが，その友人にはアンプとスピーカーの性能ばかりが気になるようであった．高音部が歪んでいる，低音部が充分に出ていない，などなど音楽自体を楽しむことができないようである．この特集「物理と数学の難所」が同様な傾向になることは避けたい．

執筆を依頼された「難所」は，エントロピーとエルゴード仮説である．確かに，この二つの基本概念は難所であるが，やや趣きを異にする．前者は正確に定義されるが納得して理解するのが難しい．後者は意味と重要性は分かるが，数学的に定式化して証明するのが難しい．まずは熱・統計物理の全体像をつかんでから，「難所」の理解を深めていくことにしよう．

2. 熱力学

熱や温度は，私たちが日常的に体験できる現象である．学問としての熱現象の研究は，19世紀に入ってから本格的に始められた．産業革命を大幅に進めたのは，熱機関の改良であった．一方，近年では地球温暖化が世界的な問題となっている．「熱」は人類にとって，古くまた新しい問題である．

熱，熱現象の基本的性質をまとめたのが，熱力学（thermodynamics）である．熱現象を記述する物理量間の一般的な関係を，数少ない法則としてまとめる．このような立場を現象論という．微視的な解析ではなく，巨視的な観点に立ち，熱と熱現象の本質を記述するのである．

2.1 第0法則

これから調べようとする物理系を体系，または単に系とよぶ．そして，その系をとりまく環境を外界とよぶ．外界と全く交渉をもたない系を孤立系という．孤立系を長い間放置すれば，最初にどのような状態にあっても，やがて終局的な状態に落ちつき，それ以上変化しない．このような終局的状態を熱平衡状態という．

2つの系A, Bを熱を通さない壁（断熱壁）で囲み，放置したとする．全系A+Bは孤立系であるから，十分長い時間たてば，熱平衡状態に達する．このとき，AとBとは熱平衡にあるという．

> **第0法則**　系Aと系Bが熱平衡にあり，また，系Bと系Cが熱平衡にあるならば，系Aと系Cは熱平衡にある．

この第0法則から，熱平衡にある2つの系が共通に持つ物理量として温度が定義される．そして，第0法則での系Bが温度計の役割を果たすことになる．

2.2 第1法則

熱力学では，系と外界の間に起きるエネルギーの移動は，仕事と熱という2つの形で起きると考

える．どちらの形であろうとも，系が持つエネルギーの変化をもたらす．

第 1 法則　系が状態 A から状態 B まで変化するとき，外界から系に対してなされる仕事 W と外界から系に入る熱量 Q の和，$W+Q$ は状態 A と B によって決まり，途中の変化の方法にはよらない．

終状態 B が始状態 A に近いならば，関与する仕事 W も熱量 Q も小さい量と考えられる．それを表すのに，$d'W$, $d'Q$ と書くことにする．第 1 法則は，$d'W+d'Q$ は変化の道筋によらないで A と B の両状態だけで決まる，すなわち，体系の状態によって定まる量（状態量）U が存在して，その変化 dU として表されることを意味している．

第 1 法則　$dU = d'W + d'Q.$　(1)

この状態量 U を内部エネルギーと定義する．小さい量 $d'W$, $d'Q$ と，微分 dU の違いに注意しよう．高校の物理との大きな違いは，まずこの点にある．

2.3 第 2 法則

第 1 法則は，熱量を含めたエネルギー保存則を意味する．しかし，これだけでは熱という形のエネルギーの本質は完全には捉えられてはいない．温度が異なる 2 つの物体が接触しているとき，熱いほうから冷たいほうへ熱によるエネルギー移動が起きる．その逆，冷たいほうから熱いほうへの移動は起きない（不可逆性）．このように，実際に起きる熱現象には方向性があることに注目するのが第 2 法則である．2 つのまとめ方で述べよう．

クラウジウスの原理 I　1 つの物体が循環過程（サイクル）を行って，低温から熱を受け取り，高温の物体にこれを出す以外に何らかの変化を伴わないようにすることはできない．

クラウジウスの原理 II　高温の物体から熱を受け取り，低温の物体にこれを出す以外に何らかの変化を伴わないサイクルは不可逆である．

第 2 法則を特徴づける状態量はどのように導入できるであろうか．その物理量がエントロピー（entropy）である．4 節で定義を含めて，詳しく議論する．

2.4 第 3 法則

第 3 法則　任意の熱力学体系において，絶対零度 $T=0$ におけるエントロピー S は 0 である．式で書くと，$S=0$ $(T\to 0)$.

この法則は，ネルンストの定理ともよばれる．

3. 統計力学

熱力学は，熱現象を一般的に記述する現象論である．そして，物質の性質は，実験事実として導入される．例えば，理想気体の状態方程式を仮定し，その気体の熱的性質を議論する．一方，統計力学（statistical mechanics）は，微視的な情報（原子・分子などの相互作用）から物質の巨視的な性質（状態方程式，比熱など）を計算することを目的とする．物質は極めて多数の原子・分子から成るので，統計的な平均量を議論することが必要になるのである．統計力学は，文字通り，力学＋確率・統計，である．

運動する多数の粒子の集まりを考えよう．各粒子の運動状態を微視的状態とよぶことにする．統計力学の基本的な出発点は，次のようにまとめられる．

系のエネルギーが与えられた値 $E \sim E+\Delta E$ をとるような微視的状態はすべて等しい実現確率をもつ．

これを等重率の原理，または，等確率の原理という．微視的状態はすべて等しい実現確率をもつならば，微視的状態の数が多いほど実現される確率は大きく，それが観測されることになる．エルゴード仮説は，その論理過程を議論する基礎であり，5 節で説明する．

3.1 小正準集団

ほとんど独立な粒子の集まりがあり，全体のエ

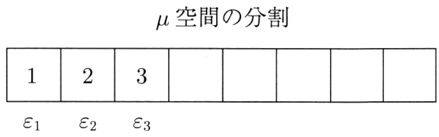


図 1　1粒子の相空間．エネルギーが $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ である，大きさ a の細胞に分ける．

ネルギー E が確定している場合を考えよう．このような集団を，小正準集団という．実際に微視的状態の数を数え，その状態数が最大になる場合を求めてみよう．

粒子の運動を，座標と運動量で記述する．座標と運動量が作る空間を相空間（phase space）とよぶ．1粒子に対する相空間（μ 空間）を考え，それを一定の大きさ a の微小体積（細胞）に分ける．細胞に番号をつけて，そのエネルギーを $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ とする（図 1）．全粒子の N 個のうち，

μ 空間の 1 番目の細胞に n_1 個の粒子，

μ 空間の 2 番目の細胞に n_2 個の粒子，

⋮

が入っているとする．このような状態の数は，N 個のものを，$n_1, n_2, \cdots$ 個に分ける配置の数 W，

$$W = \frac{N!}{n_1! n_2! \cdots} \tag{2}$$

で与えられる．ここで階乗の記号 $n! \equiv n(n-1) \cdots 1$，を用いた．全粒子数 $N = \sum_i n_i$ と全エネルギー $E = \sum_i n_i \varepsilon_i$ が一定であるという条件で W を最大にするような $n_1, n_2, \cdots$ の組は，

$$n_j = \frac{N}{f} e^{-\beta \varepsilon_j}, \qquad j = 1, 2, \cdots \tag{3}$$

$$f = \sum_j e^{-\beta \varepsilon_j} \tag{4}$$

と求められる．ラグランジュ未定乗数法を使って，条件付き極値問題から (3), (4) を導く計算は，教科書，参考書を参照されたい．

分布 (3), (4) から求められる物理量の平均値と熱力学に現れる物理量を比較することにより，

$$E = U, \tag{5}$$

$$\beta = 1/k_{\mathrm{B}} T, \tag{6}$$

$$F = -N k_{\mathrm{B}} T \log f \tag{7}$$

が示される．ここで，U は内部エネルギー，T は絶対温度，k_{B} はボルツマン定数，F はヘルムホルツの自由エネルギー，である．(4) で定義される f は，状態和とよばれる．

3.2 正準集団

小正準集団は，ほとんど独立な粒子の集まりを取り扱う．そこでは，体系を構成する粒子間の相互作用は無視できて，系の全エネルギーは各粒子のエネルギーの和であるとした．現実の原子や分子間には相互作用があり，その結果，物質は多様な性質を示す．例えば，水は低温から温度を上げていくと，氷，水，水蒸気という存在形態を変えていく．そのような変化（相転移）まで含めて，統計力学を適用できるようにしたい．

米国の物理学者ギブス（J.W. Gibbs, 1839–1903）は前世紀の初め，アンサンブル（集団，ensemble）の考え方を導入し，粒子間に相互作用が働く一般的な体系を取り扱えるようにした．平衡系の統計力学は，こうして完成された（1902 年）．

ギブスの素晴しいアイデアは，注目する体系の相空間（Γ 空間）に対し，まったく同じ構造をもつ体系（コピー）M 個の集まりを考えたことにある．これらの体系（コピー）の間には非常に弱い相互作用があって，エネルギーを交換する．しかし，M 個全体では外界となんの交渉ももたないものとする．このような体系の集まりを正準集団（canonical ensemble）という．この拡張は，

小正準集団	1 粒子の相空間	全体系の相空間，
正準集団	全体系の相空間	全体系 M 個の相空間

とまとめられる．

M 個のコピーのうち，状態 i（エネルギー E_i）をとるものの数を M_i とする．M 個のものを $M_1, M_2, \cdots$ 個に分ける配置の数は，$W = M!/M_1! M_2! \cdots$，で与えられる．配置の数 W を，$\sum_i M_i =$ 一定，$\sum_i M_i E_i =$ 一定，の下で最大にす

るような $M_1, M_2, \cdots$ の組を求める．この計算自体は，小正準集団のときと同じである．再び，熱力学と比較することによって，次の結果が得られる．

$$F = -k_\mathrm{B}T \log Z, \tag{8}$$

$$Z = \sum_j e^{-\beta E_j}, \qquad \beta = 1/k_\mathrm{B}T. \tag{9}$$

ここで，Z は正準集団での状態和である．

以上をまとめてみよう．ほとんど独立な粒子のエネルギーが ε である状態が実現される確率は，

$$e^{-\varepsilon/k_\mathrm{B}T}, \qquad \text{小正準集団} \tag{10}$$

に比例する．体系のエネルギーが E である状態が実現される確率は，

$$e^{-E/k_\mathrm{B}T}, \qquad \text{正準集団} \tag{11}$$

に比例する．(10) から (11) への発展を十分に理解してほしい．実は，小正準集団と正準集団の違いは「難所」である．譬えるならば，日本人を統計的に記述しようとする場合，独立した日本人の分布を考えるのが小正準集団の見方，日本人全体の仮想的コピーの分布を考えるのが正準集団の見方，である．個人間の影響を取り入れて日本人全体の振舞いを議論したいのならば，後者の見方，すなわち，正準集団を採用しなければならない．

4. エントロピー

4.1 熱力学エントロピー

まず，熱力学の立場からエントロピーを導入する．理想気体に対して，図 2 で与えられるような，熱を受け取って仕事に変えるサイクルを考えてみよう．考案者の名前をつけて，カルノーサイクルという．高温（温度 T_2）の熱源から熱 Q_2 を受け取り，低温（温度 T_1）の熱源に熱 $-Q_1$ を出す．第 1 法則に従って各過程での熱量の出入りを計算すると，$Q_2/T_2 + Q_1/T_1 = 0$，が成り立つ．このような可逆サイクルと任意のサイクル（可逆または不可逆）を組み合わせた合成サイクルに，クラウジウスの原理 I, II を適用すると，一般的に次のことが示される．

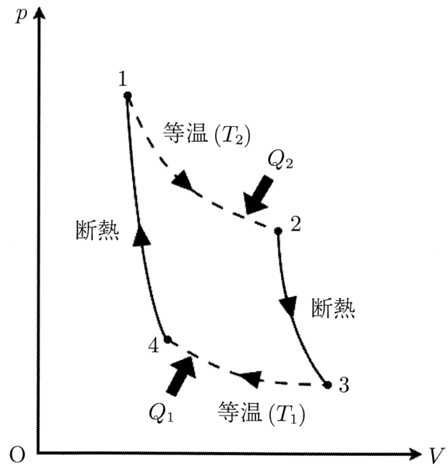


図 2 カルノーサイクル．(a) 1→2 の過程：温度 T_2 の熱源に接触させて等温膨張，(b) 2→3 の過程：断熱膨張，(c) 3→4 の過程：温度 $T_1(T_1 < T_2)$ の熱源に接触させて等温圧縮，(d) 4→1 の過程：断熱圧縮．

$$\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} = 0, \qquad \text{可逆サイクル}, \tag{12}$$

$$\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} < 0, \qquad \text{不可逆サイクル}. \tag{13}$$

(12), (13) をまとめてクラウジウスの不等式とよぶ．(12) は，単に理想気体を用いたカルノーサイクルだけではなく，任意の可逆サイクルに対するものであることに注意しよう．クラウジウスの不等式を拡張する．多くの熱源（温度 T_i）があり，それぞれから熱量 Q_i が系に入るとすると，このサイクルでは

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{T_i} = \oint \frac{d'Q}{T} \leq 0 \tag{14}$$

が成り立つ．等号はすべてが可逆サイクルの場合である．

$$\oint \frac{d'Q}{T} = 0, \qquad \text{可逆サイクル}. \tag{15}$$

(14), (15) で $\oint$ はサイクルを一回りすることを示す記号であり，サイクル 1 周について，$d'Q/T$ を足し合わせることを意味する．

可逆サイクル (15) に対して，始状態 P_0 から終状態 P へ変化の路 K をとり，状態 P から状態

P_0 では変化の路 K' を通って一回りするとしよう．このとき，(15) 式は，積分 $\int d'Q/T$ が状態 P_0 から状態 P へ行く道筋にはよらず，始点と終点の状態 P_0, P を与えれば決まることを意味する．よって，新しい状態量 S

$$S(P) - S(P_0) = \int_{P_0}^{P} \frac{d'Q}{T}, \qquad \text{可逆過程} \tag{16}$$

を定義することができる．この状態量 S をエントロピーという．クラウジウスによる命名である (1865 年)．

数学の言葉でいうと，$d'Q$ は全微分ではないが，$d'Q/T$ は全微分であることを意味する．すなわち，

$$dS = \frac{d'Q}{T}, \qquad \text{可逆変化} \tag{17}$$

と書くことができる．熱力学ではどのような量が状態量か，が基本的に重要である．その視点からまとめるならば，第 1 法則は内部エネルギー，第 2 法則はエントロピー，という状態量の存在を主張している．

4.2 不可逆変化

体積 V_1 の理想気体（n モル）が断熱的に自由膨張して全体の体積 $V_2 (V_2 > V_1)$ になったとする（図 3)．この過程は逆向きには起こらない (不可逆過程)．エントロピーの変化は可逆過程に対してのみ定義されていることを思い出そう．よって，エントロピーの変化を求めるには，この不可逆過程と同じ始状態と終状態とを結ぶ，等価な可逆過程を見つけなければならない．最も簡潔な例として，等温可逆変化を選ぶ．第 1 法則から，$d'Q = -d'W = pdV = (nRT/V)dV$ であるから，エントロピーの変化は，

$$\Delta S = \int_{V_1}^{V_2} \frac{d'Q}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nR}{V} dV$$
$$= nR \log \frac{V_2}{V_1} > 0 \tag{18}$$

と計算される．こうして，気体が自由膨張すると，エントロピーが増大することがわかる．

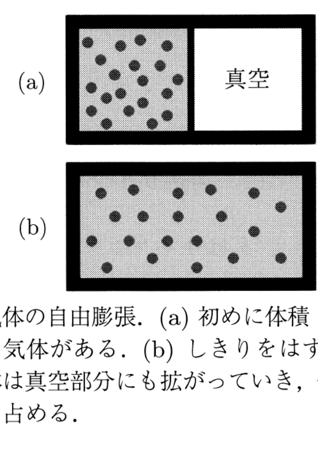


図 3　気体の自由膨張．(a) 初めに体積 V_1 の部分に気体がある．(b) しきりをはずすと，気体は真空部分にも拡がっていき，全体積 V_2 を占める．

4.3 エントロピーを微視的に見る

気体の自由膨張を例にとり，エントロピーを微視的な視点から見てみよう．熱力学は巨視的な記述で完結しているのであるが，物理的な意味を理解する助けとなるであろう．微視的な状態の数を，分子の位置を考えることによって数える．各粒子は微視的な体積 v_m を占めているとする．初めの体積 V_1 において，1 つの分子が占める場所の数は，$w_1 = V_1/v_m$ で与えられる．すべての分子が同じように体積 v_m を占めるとすると，N 個の分子を位置づける仕方の数 W_1 は，

$$W_1 = w_1^N = \left(\frac{V_1}{v_m}\right)^N \tag{19}$$

で与えられる．同様にして，体積が V_2 になった終状態において，N 個の分子を位置づける仕方の数 W_2 は，

$$W_2 = w_2^N = \left(\frac{V_2}{v_m}\right)^N \tag{20}$$

で与えられる．自由膨張によるエントロピー変化 $\Delta S = S_2 - S_1$ の式 (18) と上の (19), (20) を組み合わせると，

$$S_2 - S_1 = k_B \log W_2 - k_B \log W_1. \tag{21}$$

ここで，n モル気体では，N_A をアボガドロ数として，$N = nN_A$，また，ボルツマン定数 k_B は，気体定数 R を使って，$k_B = R/N_A$，を用いた．こうして，エントロピー S と微視的状態の数 W の間には，

$$S = k_B \log W, \qquad \text{ボルツマンの原理} \tag{22}$$

という関係があることがわかる．すなわち，ある巨視的状態に対して，より多くの微視的状態があれば，その巨視的状態のエントロピーは大きい．微視的状態が多いとき，系は乱雑であると考えることができる．よって，「エントロピーは系の乱雑さの度合い」を表していると言える．一方，乱雑さは情報が少ないこととも考えられる．実際，情報理論においては，$-\log W$ に相当する量を情報量という．

4.4 エントロピー増大の法則

一般的なサイクルに対する式 (14) に立ち戻って，状態 P_0 から状態 P へ変化の路 K を可逆，状態 P から状態 P_0 への変化の路 K' を不可逆としよう．このとき，

$$\int_{P_0K'P} \frac{d'Q}{T} < \int_{P_0KP} \frac{d'Q}{T} = S(P) - S(P_0) \tag{23}$$

と求まる．微小変化の場合には，(23) 式は

$$\frac{d'Q}{T} < dS, \qquad \text{不可逆変化} \tag{24}$$

を意味する．いま系は孤立しており，熱の出入りはない ($d'Q = 0$) とする．このとき，一般に

$$dS \geq 0 \tag{25}$$

が成り立つ．すなわち，可逆断熱過程ではエントロピーは変わらない ($dS = 0$) が，孤立系の不可逆過程ではエントロピーは必ず増大する ($dS > 0$)．これをエントロピー増大の法則という．

エネルギーにはいろいろな形態があり，それらは互いに変換することができる．しかし，最終的には低温の熱エネルギーに変わっていく．いったん低温の熱エネルギーに変わってしまうと，どれだけ多量の熱エネルギーがあっても，ほとんど他のエネルギーに変換されず，有効に使用することはできない．エネルギーは全体として保存されるが，利用しやすいエネルギーは少なくなっていくのである．これが，第 2 法則が教えてくれる教訓であり，エントロピーはその不可逆性を特徴づける指標である．

5. エルゴード仮説

5.1 エルゴード仮説

物質は多くの粒子（原子や分子）から成り，各粒子はそれぞれに運動しているので，微視的スケールで見ると物理量は刻々時間変動している．例えば，圧力 p は壁に衝突しはね返る粒子が及ぼす力積から生じる．我々が日常的に興味があるのは，10^{-3} 秒といった短い時間で変動する値ではない．少なくとも秒，分あたりの巨視的な平均値である．すなわち，物理量 A の巨視的な観測値を $A_{\text{観測}}$ とすると，それは物理量 A を長い時間にわたって平均したもの，$A_{\text{長時間平均}}$，に等しい．よって，

$$A_{\text{観測}} = A_{\text{長時間平均}} \tag{26}$$

とする．

統計力学との接点は，長時間平均の代わりに，物理量の相空間での状態に関する平均を考えることにある．ボルツマン（L. Boltzmann, 1844–1906）は，多粒子の系がエネルギー E をもって孤立しているとき，

> 粒子の相空間での軌道は，十分長時間のうちに相空間中のエネルギー一定の領域をまんべんなく通過して，その領域を一様に塗りつぶす．

と仮定した．これをエルゴード仮説（ergodic hypothesis, 1871 年）という．

物理量 A を相空間の上で平均した量を $A_{\text{相空間平均}}$ とする．もしエルゴード仮説が正しければ，

$$A_{\text{長時間平均}} = A_{\text{相空間平均}} \tag{27}$$

である．そして，(26) と (27) を結び合わせて，

$$A_{\text{観測}} = A_{\text{相空間平均}} \tag{28}$$

と考えることができる．すなわち，巨視的に観測される物理量は，相空間の上で平均された量に等しい．後者の量を計算するのが統計力学である．

エルゴード仮説をもう少し精密に言い直すことができる．粒子軌道はエネルギー一定の面上で曲線を描くが，軌道という 1 次元連続的なものが連

続的な超空間（エネルギー面のこと）をまんべんなく埋めつくすのは数学的に不可能である．そのため,「エネルギー一定の領域をまんべんなく通過して」を,「エネルギー一定の領域の各点にいくらでも近づいて」という言い方で置きかえる．これを準エルゴード仮説という．

エルゴード仮説が正しいとするならば，微視的状態は均等に，すべて等しい実現確率をもつ（等重率の原理）と考えられる．微視的状態数の数え方と統計力学的集団については，3 節で述べた．配置の数 W を最大にする問題を考えたのであるが，こうして得られた最大確率の分布は，熱平衡状態に対応している．熱力学第 2 法則によれば，孤立した体系ではエントロピーが減少することはない．よって，エントロピーが極大であると，それ以上体系に変化は起こることはなく熱平衡状態が実現する．ボルツマンの原理 (22) により，$\log W$ の最大はエントロピーの極大に相当している．こうして，熱力学と統計力学は矛盾なくつながるのである．

5.2 ワイルの玉突き

エルゴード仮説を分かりやすく説明するモデルとして，数学者ワイルは次のような例を考えた．正方形の箱（2 次元平面）の中で運動する 1 個の球がある．これは玉突き（ビリアード）の一例であり，ワイルの玉突きとよばれる（図 4 (a)）．

玉突き台の四方の壁は完全に平らで，球がこれに当たると入射角と反射角が等しく反射される．球と壁は弾性衝突をすると言ってもよい．球の大きさは無視できて，球は突き出されると運動は衰えずに玉突き台の上を直進し壁に当たると反射する運動を続ける．図 4 (a) には，$\theta = 45°$ のときの運動が描いてある．一般に，傾き $\tan\theta$ が有理数ならば閉じた軌道上をくりかえし通る運動になる．この場合，エルゴード仮説は成立しない．なぜならば，仮説が正しければ，球が訪れない点は存在しないからである．一方，傾きが無理数ならば，いくら時間がたっても運動がもとに戻ることはない．この場合，軌道は玉突き台上をまんべんなく一様に埋めつくし，エルゴード仮説が成り立つ．数学で習うように，有理数の集合は可算的だが，無理数の集合は不可算であり，無理数は有理数に比べて圧倒的に多い．したがって，球が勝手な方向に突き出されたとき，その軌道では傾きがほとんど常に無理数であって，球はほとんど常に玉突き台の上をまんべんなく埋め尽くす．この意味で，ワイルの玉突きはエルゴード的である．

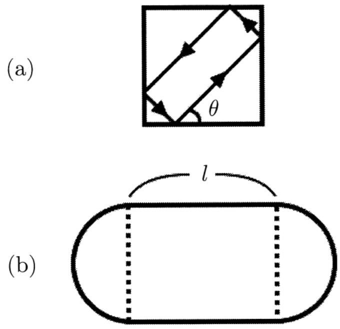


図 4　(a) ワイルの玉突き．(b) スタジアム．

最近の研究では，次のような例も知られている．半円 2 つを長方形でつないだ玉突き台を考える．その形状からスタジアム（競技場）とよばれる（図 4 (b)）．円形 ($l = 0$) ならばエルゴード的ではないが，スタジアム ($l > 0$) ならばエルゴード的である．最終目標としては，多粒子系での振舞いを調べなくてはならない．高速計算機を用いて多粒子系の運動方程式を解き，軌道の分布を調べる研究も活発に行われている．それらの結果からいろいろ興味深い現象や概念が見出されている．カオス（エルゴード的），ソリトン（非エルゴード的），といった普遍的概念の導入にもつながった．

5.3 エルゴード理論

(27) 式をエルゴード定理という．エルゴード仮説，そして，エルゴード定理の証明は数学者たちの関心を引いた．そのため数学の新しい分野，すなわちエルゴード理論が測度論の開発とともに発展した．エルゴード理論の中心課題は，長時間平均が存在するか，そして，もし存在するならば，それが相空間平均と書き換わるかどうか，を示すことにある．物理学で存在を仮定される長時間平均も，数学では自明なことではない．バーコフ（1931 年）は時間平均の極限（平均区間 $t \to \infty$）の存在，そして，その極限が相空間平均で置き換えら

れるための条件を示した．また，ノイマン（1932年）は，極値への収束をヒルベルト空間論に結びつけて証明した．その後，力学系の特徴づけ，分類について多くの進展があり，現在も研究が続けられている．

物理に戻ると，与えられたハミルトニアンに対してエルゴード定理を証明することは難しい理論的課題である．少数の例を除いて一般的に証明されていないのは残念であるが，エルゴード仮説に基づく統計力学は熱力学や実験事実と極めてよく対応し，その正しさには疑いがない．測定技術の目覚ましい発展を考えると，エルゴード仮説を実験的に検証することも可能になるであろう．理論的にも実験的にも，むしろ興味深い研究対象を提示していると考える．

6. 理解の深めかた

孔子曰く，

学びて思わざればすなわち暗く，思いて学ばざればすなわち危し．（『論語』為政）

すなわち，勉強しても考えなければ，賢いとは言えない．思いが先に立っても勉強しなければ，独善におちいる．「つめこみ教育」と「ゆとり教育」は，おのおの「学ぶ」と「思う」を特に強調するものと言える．明らかに両者のバランスが必要である．実際，勉強ばかりしていても，自分で考えなければ興味はわいてこないし，身についた理解・知識とはならない．一方，考えるには知識が必要である．研究においても，何かを発見したと思っても，調べてみると，既に誰かがそのようなことを議論していることがよくある．

「難所」に戻るならば，難所は勉強するとき，または，理解するときのキーポイントである．立ち止まって考えると，新しい理解の仕方や他への応用が思いつくかもしれない．学問はすべてが固定されているのではなく，絶えず発展の可能性を潜めている．学びつつ，時に考え，楽しみながら理解を深めていくことにしよう．

参考文献

熱力学・統計力学の標準的な教科書として，
1) 原島鮮，『熱力学・統計力学』（培風館）．
2) 久保亮五編，『大学演習　熱学・統計力学』（裳華房）．
3) 和達三樹・十河清・出口哲生，『ゼロからの熱力学と統計力学』（岩波書店）．

（わだち・みき，東京理科大学理学部）

確率論の難所

悩ましき測度論

原　啓介

1. はじめに——悩ましき測度論

確率論を学ぶ上からも教える立場からも，最も悩ましい難所はずばり，「測度論とどうつきあうか」でしょう．

測度論とは，長さ，面積，体積のようなものを正確に定義し，数学的に拡張した概念ですね．長さや面積なんて誰でも分かっていることのように思えます．ところが，きちんと定義しようとすると，様々な困難や不思議が待ち構えていて，それをクリアするには大変に巧妙でデリケイトな議論が必要なのです．それが「測度論」や「(ルベーグ) 積分論」の科目名で学ぶ内容です．

面白そうだなあ，って思っていただけますか？ところが困ったことに，評判が悪いのですよ．曰く，無味乾燥．曰く，何のためにやっているのか分からない．数学科に来る学生さんなどは，もちろん大抵は数学が好きですから，トポロジーや，複素解析や，整数論や，時には数学基礎論に，心魅かれ夢中になる奇特な方がいらっしゃるものです．しかし，積分論に一目惚れした，って人はまあ，皆無でしょうね．グロタンディエクは数学を学ぶ前に，独力で測度論を築きあげたそうですが，言うまでもなく，例外です．私なども学生の頃は，嫌いとまでは言いませんが，ごちゃごちゃしているばかりで何が面白いのかなあ，と思っていました．長じて，やはり数学者になった友人が「ルベーグ積分論は単純でいい．集合論のすっきりした議論だけでパワフルな結果が得られていて，面白い」と言うのを聞いて，ああこの友人は天才なのだと感動し，それに比べて私は… (略)，と思ったくらいです．

さて，確率論にどうして測度論が必要なのか，どうつきあっていくか，それがこの小論のテーマです．現代的確率論の立場では，確率とは測度，つまり長さや面積の仲間であり，例えば期待値（平均）とは積分に他なりません．したがって，その枠組みだけから言えば，確率論はほとんど（空間全体の測度が有限の）測度論そのものです．しかし，ただの測度論や積分論ではない．そこには確率論の長く深い歴史を通じた問題意識があり，独特の問題と世界が広がっているのです．そしてそこが悩ましいところなのですね．

繰り返しになりますが，現代的な確率論は測度論，または (ルベーグ) 積分論の上に展開されるので，確率論の講義では，学生が既に積分論を学習していることを前提とできれば，大変にありがたい．しかし，これはかなり難しい．積分論と言っても，少なくともラドン–ニコディムの定理までは必要なので（この概念は条件付き期待値とほとんど同値です），通常の大学教育ではスタートが四回生になってしまうからです．さて，どうしようか…と言っても，良さそうな方法がない．

一つの手として最近では，確率論そのものを具体例として与えながら測度論や積分論を教えるのがよろしいのではないか，と思われてきたようです．例

えば，この線に沿った教科書としては，Williams[1]（翻訳[2]）やCapiński–Kopp[3]などがあります．積分論自体が無味乾燥だとの意見は多いので，確率論のような実感のある例を題材にするのは，なかなか悪くないアイデアです．しかし，積分論の応用は確率論以外にいくらでもあるので，他の例（関数解析，リー群論，…）をたくさん入れたいと思う人もいくらでもいる．それに，この方針はどうしても詰め込み過ぎの欲張りな内容になりがちです．

またプロの立場からすれば，ルベーグ積分論の良いところは，私の天才的友人が言うように，そのシンプルさにこそあるのであって，余計な例をごちゃごちゃ入れず，半年くらいで全部さっとやりたい．応用は他の専門科目の中でいくらでもすればよろしいでしょう（うーん，スノッブ．こんなことを言いたいものです）．そこまで言わずとも，あくまでその御利益に焦点を当てて「使える積分論」を目指すのは有力です．この方針はだんだんに洗練されてきていて，今では相当に引き締まって明快で読み易い教科書があります（例えば，最近のものとしては吉田[4]）．しかし，確率論の立場から言えば，測度の構成など，この方針では省かれがちなところが逆に大切なことも多い．

そんなわけで，今のところ良い方法はありません．それが確率論を学ぶ上での最大の難所でもありますし，確率論の先生方は（私も含め），困っているのです．それはさておき，以下ではできるだけ易しく，この難所案内をいたしましょう．

2. コイン投げとパラレルワールド

確率が面積のようなものである，ということ自体はそれほど奇妙ではありません．例えば，クイズ番組によくあるような，回る円盤にダーツを投げる場合を想像して下さい．狙った商品を示すエリアにダーツが命中する確率は，円盤の面積全体とそのエリアの面積の比と考えられるでしょう．当り前すぎて，それが現代的確率論の基礎だと言われてもピンとこないと思いますが，ポイントはそこではないのです．大事なことは，どんな問題であろうがすべての確率の問題が，このような面積に帰着される，ということです．おそらくここが難所の入口でしょう．

また別の例を挙げてみましょう．1枚のコインを投げて，表が出るか，裏が出るかを見ます．これを上のダーツ投げに翻訳すれば，的（まと）の円盤が「表」のエリアと「裏」のエリアの2つだけに塗り分けられている，と思えばよいでしょう．それぞれの面積（の全体に対する比）が，表が出る確率と裏が出る確率を表している，と考えられます．もちろん，私たちはその面積を知りませんが，ひとまずは棚上げにして，事前に与えられているとしましょう．例えば，両方を同じ面積だとすれば，表が出る確率も裏が出る確率も 1/2 です．あるいは抽象的に，0 と 1 の間の実数 p を用いて p と $1-p$ としておきましょう（表か裏かどちらかが確実に出るので，確率の合計は 1，つまり 100 パーセントです）．

ここでちょっとデリケイトな話をしますと，こんな簡単なモデルでも二通りの考え方があるのですね．てっとり早いのは，起こり得るできごと（事象と言います）の基本になるものの集合 $\Omega=\{\text{表},\text{裏}\}$ を考えることで，その「面積」P を

$$P(\{\text{表}\})=p,\quad P(\{\text{裏}\})=1-p$$

と定義します．他には，表も裏も出ない場合と，表か裏が出る場合の確率，

$$P(\emptyset)=0,\quad P(\{\text{表},\ \text{裏}\})=P(\Omega)=1$$

も考えたいでしょうから，P という面積を与えてくれる関数は，事象に対して加法性を持っている必要があります．つまり，

$$\begin{aligned}P(\{\text{表},\ \text{裏}\}) &= P(\{\text{表}\})+P(\{\text{裏}\})\\ &= p+(1-p)=1\end{aligned}$$

となるべきです．逆に言えば，ここに書いたような性質が公理として満たされていれば，それを確率と呼んでもいいでしょう．

もう一つの考え方はややトリッキーですが，こうです．まず，全く一般的な集合 Ω を考えましょう．

これは未来の可能性のすべてを表現している集合で，この集合の一点 $\omega \in \Omega$ を選ぶと，一つの未来が決定します．SF 小説風に言えば平行宇宙みたいなものでしょうか．一点を指定すると, 明日私が何を食べるか, あなたがどんな人と出会うか, 次のアメリカ合衆国大統領が誰か, すべて決まります．ついでに, これから行うコイン投げの結果が表か裏かも決まります．では特に, このコイン投げの結果が表か裏かを教えてくれる写像 $X : \Omega \to \{$ 表， 裏 $\}$ を考えましょう．つまり，$\omega \in \Omega$ がこれから行うコイン投げの結果が表になるような未来を表す点だとすると, $P(\omega) =$ 表 です．この写像 X によって，未来の可能性全体を表す Ω が二色に塗り分けられます．つまり，$X(\omega) =$ 表 となるような ω のなす部分集合 $A(\subset \Omega)$ と，$X(\omega) =$ 裏 となるような ω のなす部分集合 $B(= A^c = \Omega \setminus A)$ です．

ここで確率はこの全体集合 Ω の上に定義されている「面積」です．つまり，あるできごとが起こる確率，例えば「明日，私の昼食はカルボナーラ」という事象の確率は,（全体の面積を 1 と正規化しておけば）その事象を含む平行宇宙を表す点の占める集合の面積で表されるわけです．また例えば，これから行うコイン投げの結果が表である確率は,

$$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = \text{表}\}) = P(A) = p$$

となります．この確率 $P(\cdot)$ は一つ目の考え方と同様に，Ω の部分集合の集合から $[0,1]$ 区間への写像として，$P(\Omega) = 1$ であることや，重なりのない集合について加法性が成り立つことなど，自然な性質を満たしていることが要求されますし，逆にそのような性質を満たしていれば確率と呼んでよいでしょう．

この 2 つの考え方はそれぞれの利点があります．一つ目の考え方は，最初から問題に必要かつ十分なだけの全体空間を用意していて，その経済性が魅力です．数学における経済性は大変大事ですし，実際のところ, この方法で全く問題ありません．二つ目の考え方のポイントは，問題に先立って確率というものが既にあること，そして，写像 X（「確率変数」と呼びます）が特定のモデルと問題を指定する，ということです．つまり問題から独立して,「確率」が一般的に定義されている．また,「確率とは一体全体なんだろうか」という問題に対する，回答ではないまでも，一つの「思想」を表現している．つまり，Ω をランダムネスの源泉だと思っているのですね．

この 2 つの考え方は相反するものではなく，そのミクスチュアを用いるのが普通です．例えば，モデルに依存して十分大きな集合を Ω としておいて，その個別の問題を指定するのに確率変数 X を用いる，などといったことです．

3.「できごと」とはなにか？

ここまでのところでちょっと混乱するかもしれないのは，確率 P が全体集合 Ω の「部分集合の集合」から，$[0,1]$ 区間への写像であることでしょう．Ω 上で定義された写像ではありません．もう一度もとの考え方に帰ると，確率とは面積のようなものなのですから，ある「できごと」を表している Ω の部分集合に対して，その「面積」を与える写像，つまり集合関数なのですね．コインを 1 回投げるだけならば，考えるべき「できごと」を表す部分集合は,

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{\text{表}\}, \{\text{裏}\}, \{\text{表，裏}\}(= \Omega)\}$$

の 4 つしかありません．このような考えたい部分集合の集合を $\mathcal{F}$ と書いておきましょう．

1 回のコイン投げのような簡単な実験ならばよいのですが, もちろん, もっと複雑なものを考えたくなります．例えば，コイン投げするにせよ，いつまでもコインを投げ続ける，とか．その場合には考えたい事象，つまり全体集合 Ω の部分集合は非常にたくさんあって，大変に複雑なものになるだろうことが予想されます．てっとり早い方法としては，あり得るすべての可能性を考えておけばよいだろう，つまり $\mathcal{F}$ として Ω の部分集合全部の集合を考えておけばよい．

ところが不思議なことに，これは一般的には不

可能なのです．一般的な集合の部分集合の全体，という集合があまり良い性質を持っていないからです．私たちが考えている部分集合はただの部分集合ではなくて，確率を考えたい対象なのですから，私たちが当然のように要求したい性質があります．それを満たすには，えいやっ，と部分集合全部を取ってくるわけにはいかないのです．そこで，私たちが確率というものを整合的に考えられる範囲を，自ら設定しなければならない．考えたい事象全体の集合 $\mathcal{F}$ の性質を見極めなくてはならない．ここが難所です．すなわち「事象（できごと）とは何か？」．

事象にあまり厳しい要求をすると世界が痩せてしまいますから，最低限にとどめたい．その結果は，以下の要請です．まず全体集合 Ω 自身（つまり，何かは起こるという事象）の確率を考えたい．そして，ある事象が考えられるなら，その補事象（つまり，それが起こらない，という事象）も考えたい．さらに，高々可算（無限）個の事象があるときに，それらの和集合の事象（そのうちのどれかが起こる，という事象）も考えたい．以上です．この他の自然に考えたくなるような事象はすべて，この3つから導かれて自動的に $\mathcal{F}$ に含まれます．このような性質を持つ Ω の部分集合の集合 $\mathcal{F}$ のことを，完全加法族（または σ-加法族）と言います．

そして，確率 P はこの完全加法族上で定義された関数 $P:\mathcal{F}\to[0,1]$ である，ということになります．ついでに，確率が満たすべき性質，逆に言えば，これを満たせば確率であるという公理を再度挙げておきますと，全体集合の確率が1であること（$P(\Omega)=1$），そして，共通部分のない高々可算個の事象の和集合（は，やはり事象）の確率がそれぞれの確率の和になることです．

これでいよいよ現代的確率論の決まり文句を書けることになりました．以上の登場人物たち，全体集合 Ω と事象の空間 $\mathcal{F}$ と確率 P をまとめて $(\Omega,\mathcal{F},P)$ と書き，この三つ組を「確率空間」と呼びます．現代確率論の奥義は，すべての確率の問題は確率空間があれば考えることができる（または，それ以外の問題はひとまず捨象しよう），ということです．

4. コイン投げと [0, 1] 区間

いつまでもコインを投げ続ける，という問題を考えてみましょう．つまり，この問題に対して，ちゃんと確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ を設定できるでしょうか？ ちなみに，これは易しい問題ではないです．おそらく確率論における，難所の中の名所でもありますから，この小論ではちょっと遠目に眺めるだけです．

もしこの問題がひとたび解決されれば，色々な楽しい問題をきちんと数学的に扱うことができるようになります．例えば，無限にコインを投げ続けると表が出た回数の割合は何かに収束するのか，その収束の意味はどういうことか．表が出たら右に一歩，裏が出たら左に一歩進むことにして，この「乱歩」を続けると，どんなことが起こるのか．調和級数 $\sum_{n=1}^{\infty}1/n$ は発散するが，もし一項ごとにコインを投げて表ならプラス，裏ならマイナスにして足し続けると，この級数が収束する確率は？などなど，数学的に興味深く，また応用上も重要な問題がいくらでもあります．また，理論上も重要で，このコイン投げを使って大切な問題が色々と解決されます．例えば，どんな独立な確率変数の無限列でも，実際に一つの確率空間の上に作ってしまえることが，このコイン投げを巧妙に使って示せます．

さて，まずはすべてのコイン投げの結果を表すには，全体空間 Ω として，「表」と「裏」の2つの記号からなる無限列の全体を考えればよいでしょう．「表」「裏」と書くのがあまり数学的でない，と思うのなら，それぞれ‘0’（表を表す）と‘1’（裏を表す）の無限列としてもいい．この利点は，$[0,1]$ 区間内の実数と一対一対応をつけられることです．つまり $x\in[0,1]$ に対して，その二進法展開の小数点以下の 0, 1 の列をコイン投げの結果だと解釈すればよいので，$\Omega=[0,1]$ と思えます．

さて，次はすべての事象の空間 $\mathcal{F}$ はどうしま

しょうか．[0,1] 区間のどんな部分集合の集合でもよいわけではなさそうですね…では，少なくともどんな事象を考えたいでしょうか．例えば，「1回目に表が出る確率」は当然考えたいです．さらに，自然数 n に対して「n 回目に表が出る確率」も考えたいです．これらが考えられないようではどうしようもない．そこから先は…ちょっと良く分からないので，これらを含むような最小の完全加法族を $\mathcal{F}$ としてみたらどうでしょう．完全加法族なので，「n 回目が表」という事象 H_n から集合の可算個の和と補集合の操作で作れるものは，すべて含まれています．これはかなり豊かな集合族のようですね．ここに含まれないようなものはなかなか考え難い．これでおそらく「十分」でしょう．それが本当なのかどうか，皆さん自身が確率論か積分論を学ぶ機会に，じっくり考えてみて下さい．

最後に確率 P を適切に導入する必要があります．手がかりはここでも，上で作った「基本の事象」H_n です．H_n の確率 $P(H_n)$ はどう決めましょう．n 回目が表になる確率ですから，もちろん1回のコイン投げで表が出る確率，つまり公平なコインなら 1/2, 歪んだ一般的なコインなら適当な $p(0 \leq p \leq 1)$ とするのが自然です．ここでは 1/2 としておきましょうか．では，3 回目に表が出て，かつ 5 回目にも表が出る確率は？これは2つの事象「3回目が表」と「5回目が表」の共通部分になっているのでまた事象なのですが ($H_3 \cap H_5 = (H_3^c \cup H_5^c)^c$ なので確かに)，これらは互いに他方の事象の確率に「無関係」でしょうから，1/2 かける 1/2 で 1/4 としたいですね．ここに極めて重要な概念が姿を現します．すなわち，「独立性」です．

2 つの事象 $A, B \in \mathcal{F}$ が独立であるとは，$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ が成り立つことを言う．馬鹿馬鹿しいほど単純な概念ですが，これこそ，確率論とただの積分論の差だとおっしゃる方もいます．確かに，2つの集合の共通部分の面積がそれぞれの面積の積になる，という性質は単なる測度論の研究からはなかなか出て来そうにないです．しかし，確率論の世界では極めて自然で，しかも決定的に重要です．余談ですが，独立性を2つの集合が共通部分を持たないことだ，と勘違いしている学生さんが多いようです（共通部分を持たない＝無関係？）．共通部分を持たないということは，絶対に同時には起こらないということに他なりませんので，強い関係があるのですが…（**Quiz.**「3回目が表」と「5回目が表」の事象をそれぞれ区間 [0,1] 上に図示してみましょう．）

コイン投げの確率に戻りますと，この独立性から，異なる自然数 n, m に対して H_n と H_m から作られる事象の確率も決まりますので，後は確率と事象の定義から自然に確率が決まっていくでしょう．このようにして，私たちはコイン投げの数学的モデル，$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を構成することができるのですが，これは見かけ以上にデリケイトです．例えば，舌の根も乾かぬうちの告白ですが，「後は (…) 自然に確率が決まっていくでしょう」がそもそも難所です．基本的な事象について決めた確率がすべての事象の上にきちんと拡張できるかは，実は全く自明なことではないからです．

良く考えてみると，これは [0,1] 区間に自然な「長さ」を考えていることになっています．上のようにコイン投げの列を二進法展開を使って実数に対応させましょう．すると例えば，1回目に「表」(つまり‘0’) が出るとは，二進法の小数点以下一桁目が 0 だということですから，区間 [0,1/2) がその事象です．この「長さ」が 1/2 である，と私たちは決めたわけです．しかし，私たちは [0,1] 区間のどんな部分集合に対しても，「長さ」を決められるわけではない．私たちが「長さ」を考えられる集合は限られていて，それが十分に豊かであるように，繊細かつ大胆に世界を作り上げなくてはならないのです．

実際，確率論にとってこの [0,1] 区間の世界が，シンプルでありながらいかに豊穣なものか，皆さんも確率論の勉強を進めていけば知ることになるのですが，その最初の手がかりはコイン投げにあるのです．この難所であり名所旧跡でもある場所を，いつも近くに遠くに眺めながら勉強していけ

ば，測度論や積分論も怖くないし，それほど無味乾燥でもないはず…と信じます．

5. 最後に，解毒剤

でも確率論の勉強を本格的に始める上で，本当に測度論は必要なのでしょうか？ 確率論は長い歴史を持っています．古の偉大な数学者たちは確率論に深い興味を持ち，重要な貢献をしています．例えば，デカルト，フェルマー，パスカル，オイラー，ガウスもです．しかし彼等はもちろん，確率空間の定義を知りませんでしたし，それ以前に測度論も知りませんでした．多くの場合は，日本の高校教育でするように「同様に確からしい」ものを数えて比を計算するか，直観的な理解に基づいての研究だったわけです．だから時には，おかしな矛盾や間違いにつまづきました．実際，きちんとした数学的定義を持たなかった彼等にとってみれば，確率論の問題は難所だらけだったはずです．しかしそれでも，彼等は確率論に魅入られ，時に極めて深い結果に達しました．私たちだって同じことができるはずです．

正直に言うと私自身は，現在の確率論の教程がやや現代的すぎることに疑問を感じています．現代数学の立場からすればやや未熟だったり，素朴すぎたりしても，初等的な題材によって初学者を確率論の豊かな世界へ誘うことにもっと力を注いでもよいと思います．例えば，古典的な面白い結果をたくさん集めた『確率論へようこそ』[5]のような内容がもっと，大学の教程の中で教えられてよいと思います．また，もっと高度ではありますが，やはり素朴な道具だけで書かれた，しかし今でもプロの確率論研究者をインスパイアし続けている名著として，フェラーの第一巻（上・下）[6]があります．

確率論を旅する上での難所とは，という問題に戻りますと，私たちの悩みは初等的確率論と現代的確率論のバランスをどう取るかだと言い直すことができるでしょう．今や測度論なしでの確率論はあり得ない．だからと言って，測度論が確率論なのではない．測度論でないところが，確率論なのです．これから確率論を学ぼうとする皆さんには，このバランスを取りながら素朴な確率論の直観で切り込み，確実な測度論の知識で難所を乗り越え，確率論の豊かな世界を冒険してほしいと思います．そして確率論の現代的基礎を手中にしたあとでは，こう言って下さい．ルベーグ積分論は単純でいいよね…

参考文献

1) D. Williams. *Probablitiy with Martingales*, Cambridge University Press, 1991.
2) D. ウィリアムズ『マルチンゲールによる確率論』赤堀次郎・原啓介・山田俊雄訳，培風館，2004.
3) M. Capiński and E. Kopp. *Measure, Integral and Probability*, 2nd ed., Springer, 2004.
4) 吉田伸生『ルベーグ積分入門—使うための理論と演習』遊星社，2006.
5) ブロム/サンデル/ホルスト『確率論へようこそ』森真訳，シュプリンガー・フェアラーク東京，2005.
6) フェラー『確率論とその応用 I（上・下）』卜部舜一他訳，紀伊国屋書店，1980.

（はら・けいすけ，立命館大学理工学部）

数理・情報系のための
整数論講義



木田雅成著，B5 判，224 頁，本体 1876 円，サイエンス社

「今，ぼくは本を書いているのです」「へー，何の本ですか？」「代数的整数論の本です！」標記の本の著者である木田氏とのこのやりとりで，筆者は初めてこの本が世に出ることを認識したと記憶している．整数論，特に日本では高木貞治以来，常に活発に研究が続けられている代数的整数論の分野において，著者の木田氏は幅広い知識と興味を兼ね備え，現在でも最先端で活躍されている研究者のお一人である．最初にこの本の原稿を拝見したときから，著者の代数的整数論への熱い思いと，初学者に対する細やかな気配りが諸所にちりばめられているのを体感し，とても楽しく目を通させていただいている．タイトルの「数理・情報系のための」にあるように，単に数学の専門課程向きのテキストであるのみならず，情報，理工系の学生にも配慮した self-contained な構成になっている．にもかかわらず，専門的な内容を削るのではなく，多くの方に代数的整数論の魅力を伝えようと努力されている著者の強い思いが読む側に伝わってくる．以下，簡単にその内容を見てみよう．

第 1 章「初等整数論」では，古典的な整数の話題を基に，いわゆる群・環・体の導入を行い，第 2 章「有限アーベル群の指標」では，整数論の研究で重要な役割を果たすガウスの和，ヤコビの和を解説している．本書の序文の中にもあるが，証明を読むのに慣れていない読者のために，計算問題がたくさん用意されて，それらを自分自身でやってもらい，結果と理論がピッタリ合うことで，理解を助けるという配慮がなされている．またちょっとした計算問題の後に，「素数定理」「ゴールドバッハの問題」のような古典的整数論の話題や，「アルティン予想」「離散対数問題」など現在でも盛んに研究が続けられている話題が述べられており，初めて整数論に触れる読者にその面白さ，奥深さを伝えようとしている著者の意気込みが感じられる．第 3 章「代数体の整数論」では，いわゆる代数的整数論の舞台である，有理数体の有限次拡大体における整数論が展開される．とくにガロア理論に関しては，必要になる事柄をコンパクトにまとめて解説されている．近年の大学の講義内容の削減に伴い，数学系の学生の中にもガロア理論に触れないで卒業しているものが少なからずいるのが現実である．その意味で，幅広い層への代数的整数論の入門書は，いかにガロア理論の解説をスマートに行うかも非常に大事なポイントである．著者はこの点に関しても手を抜くことをせず，かなり丁寧に証明をつけ，具体例を交えながら，その一方で初学者であっても証明を読むことの大切さを実感させている．特に後半の分岐理論やヒルベルトの理論は，代数体の整数論の美しさを実感できる理論であり，是非読者には頑張ってここまでたどり着いてほしいと思う．さらにその先にそびえる代数的整数論の金字塔「類体論」に関しても，一節をさいて，その概要に触れている．最後の第 4 章「代数体の有限性定理」では，ミンコウスキーの「数の幾何」に関して解説し，類数の有限性，ディリクレの単数定理を証明している．とくに著者のご専門でもある楕円曲線と不定方程式の関連についても興味深い例がいくつも紹介されている．

読者の理解の助けのために，付録として 3 つの章が付されているが，とくに「数論ソフトウェア」の章では，無料で PC にインストールできる「KASH」と呼ばれるソフトが紹介されている．整数論の学習，研究において数値計算は必須である．そのときに手計算や電卓での計算も大切であるが，非常に大きな数との触合いや，やや複雑なアルゴリズムの理解には KASH のようなソフトはとても役に立つものである．著者のご専門の楕円曲線や不定方程式でも非常に大きな整数が登場する．その意味でも，このようなソフトを利用して，読者により深い感激を味わってもらおうという著者の思いが込められた 1 章だと思われる．

この本は，タイトルにある数理・情報系の学生や研究者のみならず，整数を愛する多くの方々に手にとって読んでもらいたい一冊である．先人たちの見出した素敵な調和の世界を垣間見ながら，PC を操って，読者それぞれの発見に心を躍らせてほしい．

津村　博文（首都大学東京大学院理工学研究科）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

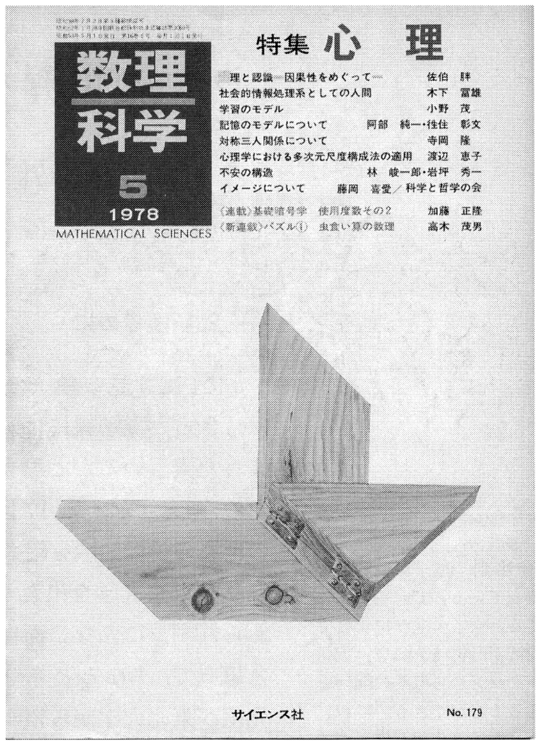
阿部 純一

1978年5月号

1978 年の 5 月号に，「記憶のモデルについて」というタイトルで，人間の記憶現象の説明と予測を試みるモデル化研究の現状を紹介した．

ある時点で記憶した内容の減衰量を時間の関数として予測してみようとする数理モデルが流行した時代がそれ以前にあったが，1970 年代には，そのようなパフォーマンスの結果の予測のみを行う研究よりも，人間の記憶の内的な仕組みそのものをシステム論的にモデル化することに興味が移っていた時代であったと言える．そのような，内的な仕組みを明らかにしたいという欲求は，認知科学（cognitive science(s)）と呼ばれる学問分野の発展と相俟って，この 30 年間維持され続けている．その間，認知科学（認知心理学，認知神経科学など）において，記憶，知覚，言語，思考，感情など人間の心的機能とそのメカニズムについての探求は間断なく続けられ，その研究成果も着実に蓄積されてきたと言える．ただし，その研究の進展は，当該分野の専門研究者にとっては，あくまでも着実でなだらかなものであり，決して，急激でめざましいものであったとは認識されていないと思う．

しかしながら，こと一般生活の場における記憶や知能，言語，感情などの心理現象の取扱いについては，30 年前とは格段の違いがある．それは，テレビや新聞でのそれら心理現象の取扱いが，当時とは比べものにならないほど多くなってきていることからも分かる．研究世界でのそれらの心理現象に対する解明のスピードよりも，一般市民のそれらの現象に対する興味の増大のスピードのほうが，はるかに上まわったということである．この一種社会現象とも言える時代変化を読み解くキーワードの一つは，思うに“脳”である．30 年前には“脳”とか“脳科学”という言葉はテレビや新聞ではさほどなじみのある言葉ではなかったはずである．今や“脳”や“脳科学”という言葉は，高齢者の認知機能の問題についてのみならず，子育てから，教育や青少年の行動の問題についてまで，頻繁に登場するようになっている．

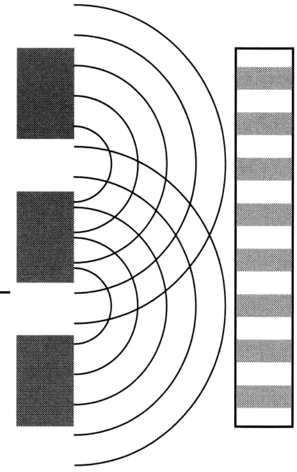


このような変化は，それだけ脳の解明が期待できる時代になってきていることの現れであるとも言えるが，一面，この社会現象は，いつの時代でも起こり得る，科学の進展とは無関係な単なる人間の“脳の働き”の特徴の一つの現れに過ぎない可能性もある．つまり，ヒトは，“心”，“行動”，“心理”などの言葉でよりも，“脳”という言葉で語られるほうが，より“科学的”なイメージで受け取り，より信頼し，より好む，というだけのブームが現在起こっているということなのかもしれない．そうでないことを祈りつつ，“脳”研究の進展と，ここしばらくの“脳”ブームとを見つめていきたいと思う最近である．

（あべ・じゅんいち，北海道大学大学院文学研究科）

目で見て学ぶ量子力学

第2回 実験でひもとく量子の不思議



ミクロの世界を探る電子線技術

外村　彰

2.1 はじめに

“電子線で見る量子の世界” の話の連載を始めたものの，本誌の読者の中には，きっと電子線には馴染みのない方が多いと思う．第1回でうんざりしてしまった人もいるかと思う．大学で電子顕微鏡について教わる機会はあまりないだろうし，ここで，17回にわたって出てくる専門用語の解説も兼ねて，電子線の世界の予備知識を紹介したい．専門に近い方には，つまらないかもしれない．

私が東京大学を出た40年前には，物理学科には電子顕微鏡の専門の先生はおられず，こんなに面白いのに何故電子顕微鏡を物理に入れてもらえないのかと思って，ちょっとくやしい思いをした．私が卒業して15年経って，井野正三先生が東北大学から招かれて，電子顕微鏡や電子回折[傍注1]の講座が生まれ，今は，私の研究室にいたことのある長谷川修司さんがその後を引き継いでいる．

2.2 電子顕微鏡

電子顕微鏡は光学顕微鏡でも見えないミクロの世界を見る道具として誕生した．光学顕微鏡で見える限界は波長で制約され，0.2 μm（ミクロン）止まりである．1 μm は $\frac{1}{1000}$ mm．血液中の白血球や赤血球は数 μm なので光学顕微鏡で見えるが，0.1 μm 以下のウイルス[傍注2]になるとその姿を捉えることはできない．電子線は加速されて高速になるほど波長は短くなり，光の10万分の1以下の波長にすることもできる．このため，電子顕微鏡では，光学顕微鏡で見えないウイルスやバクテリオファージ[傍注3]の姿を捉えることができる．金属疲労[傍注4]の原因として飛行機が墜落するたびに問題視される原子の並びの欠陥（格子欠陥）も電子顕微鏡で直接見えるようになった．今では1 μm の1万分の1の1 Å（オングストローム）まで観察可能である．現在は，nm（ナノメート

［傍注1］　電子は波動性を持っているので，物質に当てると原子の並びによって回折（干渉）を起こす．回折パターンから原子の配列を知ることができる．X線に比べ原子との相互作用が強いので，電子線は薄膜，固体表面，気体の構造を調べるのに向いている．電子の波動性が直接証明されたのは，電子回折によってである．

［傍注2］　インフルエンザ，黄熱病などのウイルス（病原菌）は非常に小さくて光学顕微鏡では見えない．

［傍注3］　細菌を溶かすウイルス．ファージは「食べる」という意味．

［傍注4］　金属に繰り返し力を加えることによって，小さな力で破壊が起こることを言う．欠陥の移動によって小さな孔ができることが原因と考えられている．

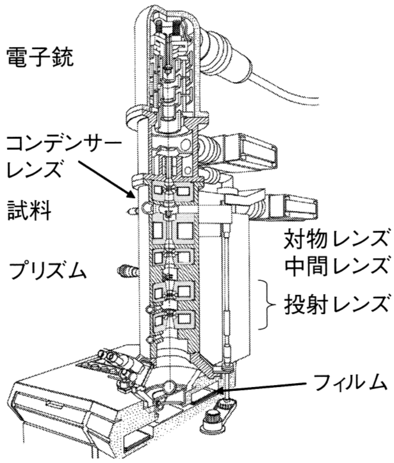


図 2.1　透過型電子顕微鏡の例.

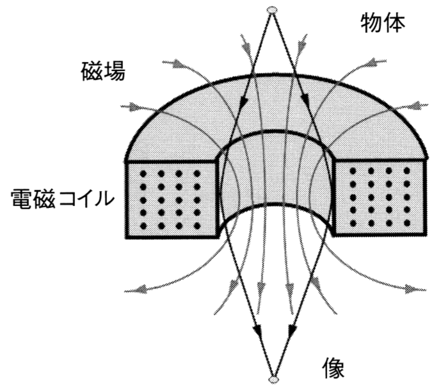


図 2.2　磁界型電子レンズの原理.

ル）という単位を使うことが推奨されているが，原子の大きさが 1 Å 近傍なので，電子顕微鏡の人たちは，未だに Å を使っている．10 Å が 1 nm である．

電子顕微鏡にはいろいろな種類があるが，透過型（Transmission electron microscope, TEM（テム））と走査型（Scanning electron microscope, SEM（セム））に大別できる．光学，医学，農学等の分野で広く使われている．

2.2.1 透過型電子顕微鏡（TEM）

我々が開発した 10 万ボルトの透過型電子顕微鏡の構造を図 2.1 に示す．電子銃から出た電子を 10 万ボルトまで加速し，コンデンサーレンズで電子線を収束して薄膜試料に当てる．このとき，非常に明るい電子線を試料に当てなければならない．光学顕微鏡では倍率は 2000 倍もあれば充分だが，1 Å の解像度で物を見ようとすると 100 万倍といった驚異的な倍率に拡大する必要があるためである．透過した電子線の像を電子レンズ（対物，中間，投射などのレンズ）で次々に拡大し，蛍光板で観察したり，フィルムに撮影したり，動画をテレビカメラで記録したりする．

電子線は大気中では分子に衝突してわずかな距離しか進めないので，通路はすべて真空にしてある．通常用いられる電子レンズは，磁界型レンズで，電子線の通路を中心軸に持つ電磁コイルである（図 2.2）．コイルに流す直流電流を増減すれば，レンズの強さ（焦点距離）が変化する．光学レンズは強さが一定なので，ピント合わせにはレンズを動かすが，電子レンズでは，電流の調節でピント合わせができる．

試料は可動ステージの上にのせて前後左右に移動して見たい視野を選び，拡大レンズの調整によって 1000 倍から 100 万倍に拡大した像を得る．

電子顕微鏡の分解能の限界は，原理的には電子の波長で決まるが，1 Å 近くになってくると，様々な因子で制限される．試料を動かすステージは，見たい場所を容易に選べるように自在に動かせなくてはいけない．しかし，ここと決めたらぴたりと止まり，露出時間の間は 1 Å も動いてはいけない．振動していてもいけない．電子は電荷を持っているので，電子顕微鏡の中に侵入したごく

わずかな交流磁場で容易に曲げられてしまうが，その影響は1Åに比べて充分小さくなくてはならない．加速電圧や電子レンズの電流も充分安定でなくてはならない．レンズの色収差で像がボケてしまう．“振動”と“磁場による誘導”そして“電源の不安定性”は，分解能を悪くする主要因である．だが，これらが無視できるようになったからといって分解能が波長まで到達する訳ではない．

2.2.2 電子レンズ

磁界型レンズを使う限り，分解能は収差で決まる．“色収差”は，電子の速度（波長）のバラツキによって焦点距離が変化するので像をボカす．“球面収差”は，電子レンズのどの部分を使うかによって焦点距離が変化するので，これも分解能を決める因子となる．光学レンズでは凹凸レンズを組み合わせて，これらの収差を除くことができる．ところが軸対称磁界型電子レンズでは凹レンズが作れないことが証明されている．例えば，コイルに流す電流を逆向きにして磁場の向きを逆転しても，凹レンズになるわけではない．凸レンズのままである．これは，レンズの強さ（焦点距離の逆数）が，コイル電流の2乗に比例するためである．

光学レンズと一番違う点は，電子の軌道が光軸を含む一平面上にないことである．光軸に平行な磁場は，平行な電子に力を及ぼさない．しかし，レンズには磁場の動径成分が存在するので，電子は光軸を中心に回転を始める．つまり電子はレンズの中で，螺旋を描きながら焦点を結ぶ．電子を波として見たとき，一体波面はどうなってしまうのか心配になる人もいるかと思う．平面波が電子レンズに入射すると，レンズの中で螺旋の波面になり，レンズを出ると再び平面波になる．

2.2.3 電子銃

電子顕微鏡にとってレンズと並んで重要なのは電子銃である．100万倍に拡大しても像が観察できるためには，非常に明るい照明をしなければならない．さらに，レンズ収差の効果を最小限に抑えるために，平行でエネルギー幅が小さい電子線を使わなくてはならない．電子源には，昔は白熱したヘアーピン型のタングステン・フィラメント（図2.3(a)）の先端から出てくる熱電子線を使った．ヘアーピンの先に針をつ

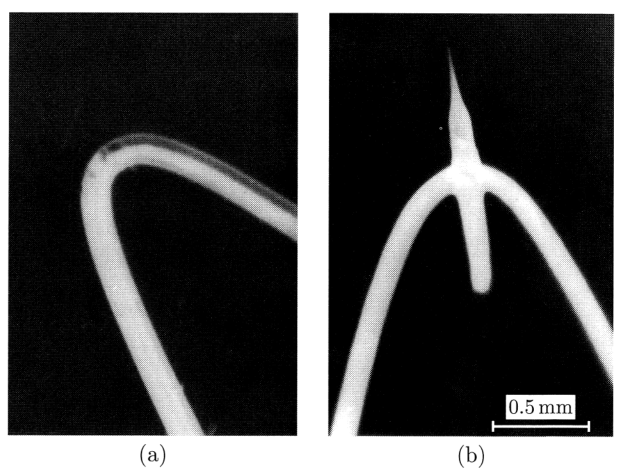


図2.3 電子源．(a) 電子顕微鏡で昔使われていたヘアーピン型フィラメント．(b) 輝度の高いポイント・フィラメント．

けたのがポイント・フィラメント（図 2.3 (b)）で，針先の電場が強いので輝度のより高い電子線が得られる．これらのフィラメントは，いずれも手作りだった．現在は，仕事関数が小さく，それほど高温にしなくても良い LaB_6（ランタンヘキサボラロイド）の針先からの熱電子線が使われる．

熱電子線よりも桁違いに輝度の高い電子線は“電界放出電子線”である．この電子線は輝度が高く，かつエネルギー幅も小さく，高分解能電子顕微鏡や干渉実験に向いている．

2.2.4 電界放出電子線の開発

我々は，ここ 40 年間にわたり，輝度のより高い電子線を求めて開発を繰り返してきた．そのリストを表 2.1 に示す．

1967 年から開発を始めたが，その実現には，何と 10 年もの歳月を要した．電子源が 50 Å とあまりに小さいために，針がほんのわずか振動したり，わずかな交流磁場によって電子線が偏向されたりして，点電子源がゆれてしまい輝度が減少するので，開発は苦労の連続だった．

東京・国分寺にある日立中央研究所にいたときのことだが，本来なら一点に静止していなければならない電子源の像が，何もしていないのに，あちこち大きく振り回されていた．電子線を揺らしているのが，隣の部屋においてあるコンピュータからの交流磁場ではないかと思うと，電源を切ってもらい，上の階の実験装置から振動が伝わってきていると思えば，それを止めてもらう．ところがどうしても原因がつかめない．そのうち，だんだんと遠い所まで疑い始め，とうとう，近くを通っている電車（中央線，西武線）が悪いのではないか，ということになった．

電車が悪いようだからといって，どけてみてもらうわけにもいかない．そこで，1 人が 12 階の塔に上がり，実験室で電子線を見ている人に逐一電車の往来を電話で知らせることにした．昼間，電車も自動車も頻繁に通っているので，因果関係はつかめなかったが，終電近くになってくると，スポットの揺れもまば

表 2.1　高輝度電界放出電子顕微鏡の開発の歴史．

年代	加速電圧	輝度 (A/cm^2· ster)	新たに拓かれた可能性
1968 年	10 万ボルト（熱電子）	10^6	• 電子線ホログラフィーの可能性を実証
1972 年	5 万ボルト	10^7	
1978 年	8 万ボルト	10^8	• 磁力線の観察 • 格子分解能記録（0.62 Å）
1980 年	12.5 万ボルト	2×10^7	• 多段加速管の利用
1982 年	25 万ボルト	4×10^8	• AB 効果の検証
1989 年	35 万ボルト	5×10^9	• 磁束量子の動的観察 • 格子分解能記録（0.55 Å）
2000 年	100 万ボルト（1 MV）	2×10^{10}	• 格子分解能記録（0.49 Å） • 高温超伝導体の観察

らになってきた．注意深く観測すると，電車と関係があり，つながりが見えてきた．どうも電車が国分寺駅を発車するときにスポットが動くようだ．終電が去った後，この大きな揺れはなくなった．

原因が電車だとはっきりしたので，手を打つことができた．数カ月経った或る日，飛び上がらずにはいられない結果が出た．干渉縞が数え切れないほど，たくさん並んでいる写真が撮影できた．普通の電子顕微鏡写真は，目で見れば事は足りる．細かいものが写っているときにも，フィルムをルーペで覗けば充分である．ところが，このフィルムはルーペで見ても，何も見えない．ただ，蛍光灯にかざすと虹色になって 3 本に見えるので，何も写っていない訳ではない．そこで光学顕微鏡で拡大してみると，7 ミクロン間隔で，縞がびっしりと並んでいた．輝度は 2 桁向上していた．

こうして，これまで，じかに見ることのできなかった電子線の干渉縞が，蛍光板上で直接見えるようになり，フィルムに撮影すると，高々 300 本しか撮れなかった干渉縞の数が 3000 本まで向上した．高干渉電子顕微鏡が実現した 1979 年 8 月にシカゴ大学の A. クリュー教授[傍注5]の研究室を訪問したとき，ここで E. ツァイトラー教授[傍注6]が開発していた 10 万ボルトの電界放出電子顕微鏡の開発を見せてもらった．数年前の我々の装置と同様，電子源が交流磁場で振られて，リサジュー図形[傍注7]を描いていた．

だが，向上したとは言えレーザーに較べれば，まだまだだった．加速電圧の高電圧化などによって開発を続け，輝度の値は次第に高くなっていった．加速電圧を上げると，電子線は進行方向に加速され，進行方向の速度成分だけが増えるため，開き角 β が小さくなり，それだけで輝度が増加する．さらに，電子銃のスペースも大きくなるため，磁界レンズと電界レンズを重畳させるなどして，加速時に生じるレンズ収差を軽減することによって，さらに輝度を向上させることができる．そして，輝度の高い電子線が誕生するたびに，そのつど新しい応用の可能性が拓けてきた．

1978 年に開発した 8 万ボルト電子顕微鏡で桁違いの干渉縞が得られ，電子線の波動性を用いた様々な応用が開けた．まずサンプルの厚さ分布が干渉顕微鏡として定量的に表示できるようになり，磁力線が直接観測できることも見つかった．

1982 年に開発した 25 万ボルト電子顕微鏡では AB 効果の検証実験が可能になった．磁気的に閉回路を作るリング状の磁性体サンプルの孔の中と外側を通った電子線の間に位相差を検出し，電子線が電磁場に触れていなくても観察可能な効果（アハラノフ・ボーム効果）が生じることを一目で示すことができた．1989 年には，35 万ボルト電子顕微鏡を開発し，超伝導体中の磁束量子の 1 本 1 本を動的に観察できるようになった．さらに 2000 年には 100 万ボルト電子顕微鏡を開発し，電子線の輝度が当初と比べて 4 桁も向上し，1 万本を越す干渉縞が記録できるようになった．高温超伝導体中の磁束量子の動的観察も可能になった．

［傍注 5］ 電界放出電子銃の実用化に初めて成功したのがクリューである．当初，SEM 用の電子銃に開発したが，それを TEM 用に使おうとしたが，すんなりといかなかった．SEM では電子線を小さなスポットにすれば良いが，TEM では視野全体を照射しなければならないので，大電流が必要になる．高い加速電圧も必要になる．

［傍注 6］ ツァイトラーは，この頃，クリュー教授の研究室で大槻三男さんと一緒に電界放出型電子銃を搭載した透過型電子顕微鏡を開発していた．その後，ベルリンのフリッツ・ハーバー研究所の所長になった．

［傍注 7］ x 軸と y 軸に別々の振動を与えて合成して得られる 2 次元の曲線．

2.2.5 走査型電子顕微鏡（SEM）

走査型電子顕微鏡では，電子線をレンズで細く絞り，試料面上を前後左右に走査する．表面から発生する電子（二次電子，反射電子など）や試料電流を検出・増幅して輝度変調[傍注8]をかけ，モニター上に画像を描く．テレビと似た原理でモニター上に拡大像が得られる．とりわけ二次電子の強度は，表面の物質や凹凸に依存するので，立体的に表面を観察できる．倍率は試料面とモニターの走査振幅の比で決まる．

［傍注 8］ 電子線と同期してモニター上で画面を走査するが，検出した電子の強度でモニター上の各点の明るさを表示すると，表面の像が得られる．

SEM の分解能は電子線を細く絞るほど良くなるが，通常は TEM には及ばない．しかし，試料作成が容易なので簡便に使われている．薄膜試料を細い電子線で走査して透過電子線を検出すれば，TEM と同様の像が得られる．これが透過型走査電子顕微鏡（STEM（ステム））である．SEM や STEM は，電子線のスポットの大きさで分解能が決まる．このため電子線の輝度特性は，TEM の場合よりも重要になってくる．クリューは電界放出電子銃を装備した STEM を開発して，従来の熱電子線に比べ桁違いに高い分解能を得て，原子の像を初めて得た．

2.3 電子線の干渉技術

我々の研究では，電子の波動性を利用する．そのために必要な実験技術を紹介する．

2.3.1 電子線の干渉計

電子線を干渉させる道具として，最も実用的に利用されているのが，1955 年に G. メレンシュテットと H. デュカーによって開発された電子線バイプリズム（図 2.4）である．中央の細いフィラメントと両側の接地（アース）電極から成る．フィラメントに正の電位をかけると両側を通る電子線が中央に引き付けられて，下方で重なり合う．フィラメント近傍の電位分布 $V(r)$ は，円筒状になり，

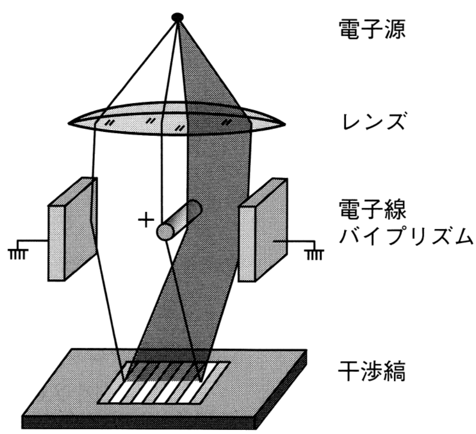


図 2.4　メレンシュテット型の電子線干渉計
—電子線バイプリズム—．

$$V(r) = V_f \frac{\ln(r/r_2)}{\ln(r_1/r_2)} \tag{2.1}$$

で与えられる．r_1, r_2 はフィラメントの半径とフィラメントの中心から接地電極までの距離である．V_f はフィラメントにかけられた電位である．

平行な電子線がバイプリズムに入射すると，フィラメントの方向に曲げられる．曲げられる角度 δ は小さいときには

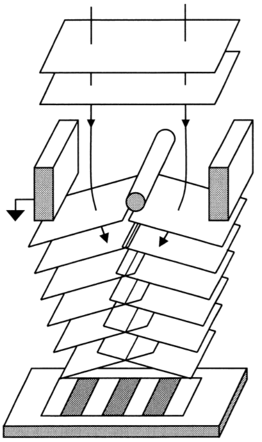


図 2.5　電子線バイプリズムの動作原理.

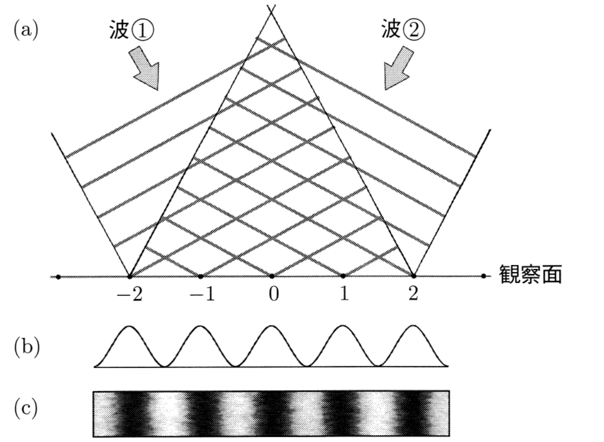


図 2.6　2 つの水面の波紋（平面波）の干渉. (a) 波面の様子. (b) 観察面での水面の高さ. (c) 電子線の干渉縞.

$$\delta = \frac{\pi V_f}{2E\ln(r_1/r_2)} \tag{2.2}$$

で与えられる．ここで，E は電子のエネルギーで単位は eV だが，ここでも電子の身になってボルトの単位で表す[傍注 9]．この式から，電子の曲げられる角度 δ は，フィラメントの電位 V_f に比例し，入射位置 r には依存しないことが分かる．つまりバイプリズムのどの位置に電子が入射しても，同じ角度だけ曲がることを示している．これは光のプリズムと同じ働きである．三角形の光のプリズムを 2 つ並べたものと同じ働きをするので，バイプリズムと呼ばれる．

[傍注 9]　1 eV は，1 ボルトで加速したときに電子が得るエネルギーのことを言う．電子ボルトとかエレクトロン・ボルトと呼ばれる．1.6×10^{-19} ジュール．電子顕微鏡などでは，電子のエネルギーを加速した電圧の値で 10 万ボルト（100 kV）などと表現することが多い．

速度の揃った平行な電子線をバイプリズムに入射する．電子線に垂直な面を波面と考えると，入射電子線は平面波である（図 2.5）．バイプリズムの両側の電子線は，フィラメントのプラスの電荷に引き寄せられて中心に曲げられる．こうして，互いに傾いた 2 つの平面波になる．これら 2 つの波は，下方で重なり合い干渉する．

2.3.2 電子干渉の意味

2 つの波が重なったときに，何が起こるかは水面の波紋を思い出してもらうと分かる（図 2.6）．基本的なことなのでここで思い返しておこう．図 2.6 (a) には，水面の 2 つの波の波紋（波の山）の位置を描いてある．観察面上の中央の点 0 では，“一方の波の山” が “他方の波の山” と重なって，より高い山になる．しかし，波紋は静止している訳ではない．次の瞬間には，谷と谷が重なった深い谷になる．つまり，ここでは，水面が激しく上下振動をしていることになる．

この点は両側の波から等しい距離にあるので，2 つの波が，あるときには山と山，あるときには谷と谷といった具合に同じ状態で重なって，上下に激しく振動する．これと全く同様に，激しく振動する点は，点 1，点 2，点 −1，点 −2 など，いくつもある．これらの点では，両側からやってくる波が，ちょうど波長の整数倍の距離だけずれている．

これらの点のちょうど中間点では，どうなっているのか？——ここでは，1 つ

の波が“山”だと思うと，他方の波は“谷”になる．2つの波はお互いに打ち消し合って，水面の上下振動は全く起こらない．こうして観察面上には，振動が強く起こったり，起こらなかったりが，周期的に繰り返されることになる．

電子の波の場合には，水面の波紋のように，波面を直接見ることはできない．しかし，その代わり干渉の結果を振動の強度分布として，写真フィルムに撮影することができる．つまり，波の高さ（振幅）の2乗を時間的に平均した値の分布が観測される．振動が激しい所は，フィルムが強く感光し，振動しない所は感光しない．このためフィルム上に規則正しい白黒の縞が周期的に現れる．これが，“干渉縞”である．電子線の干渉縞の実例を図2.6(c)に示す．

2.3.3 電子線ホログラフィー

ついでに，ここで電子線ホログラフィーの原理を水面の波紋を使って考えておこう．図2.6の①の波を，平面波ではなく，任意の物体波（物体に当たって散乱した波）に変えてみたら，一体どうなるのだろうか？ 波は平面波ではなくなっているので，その影響は干渉縞に現れる．干渉縞の強度が変化したり，縞の間隔がずれたりする．電子の波の場合には，波面は直接観察できないが，この干渉縞なら観察できる．この“干渉縞の乱れ”から，“物体波がどれだけ平面波から乱れているかの様子”を知ることができる．干渉縞には，“乱された波面”が“基準の波面”に対して，どれだけずれているかが記録されているからである．

この事実に気づいたのは，D. ガボールである．彼はこの原理を使って，干渉縞から“乱された波の波面”を再生する方法を思い付いた．1948年，ガボールは干渉縞の写ったフィルム（これを“ホログラム”と呼ぶ）に光の平面波を当てると，電子の像（波面）がそっくり光の像（波面）として3次元的に再現することを見つけた．

ガボールの狙いは，電子の波面を単に光で再生することだけにあった訳ではない．電子レンズの収差を受けた像を光のレンズを使って補償して，電子の波長に至る分解能を実現しようとしたのだった．ガボールは1971年“ホログラフィー”[傍注10]を発明した功績でノーベル賞を受賞する．電子顕微鏡の発明者であり，ベルリン工科大学でガボールの弟弟子（おとうとでし）だったE. ルスカのほうは，1986年になって，やっとノーベル賞をもらうことになる．

[傍注10] ホログラフィー（holography）とは，全体の情報，つまり波の位相と強度を記録した結像法という意味である．ホロ（holo）はwhole（全体）の意味．

（とのむら・あきら，日立製作所フェロー／理化学研究所グループ・ディレクター／沖縄科学技術研究基盤整備機構代表研究者）



物理の道しるべ
～研究者の道とは何か～
第1回

星の見えない空

阿部　龍蔵

1. はじめに

今回からリレー連載「物理の道しるべ―研究者の道とは何か」が始まる．この企画の提案者は東京大学の米谷民明先生で，私が第1回目を担当し全体として21回ほどの連載の予定である．私は2005年の3月から本誌の編集委員会の委員長をお引き受けした．先ほどお名前の上がった米谷民明先生それと同じく東京大学の河東泰之先生が編集委員である．3カ月に1回の頻度で編集委員会が開かれ，編集部のスタッフや編集委員のご提案をもとに本誌の編集が行われている．編集委員長の私の仕事は古い事項の確認というところであろうか．

ある企画の第1回目を担当するのは実は今回が初めてではない．古い話で恐縮だが，1991年（平成3年）東京大学を定年退職し放送大学に移籍した直後，岩波書店で「基礎物理シリーズ」の出版が計画された．編集者は長岡洋介先生，原康夫先生のお2人で，私はその第1巻力学の部を執筆することとなった．執筆者のうちで私が最長老で，どちらかと言えば，執筆者は私に近い世代の方々であった．1994年3月に書いた『力学・解析力学』の序文[1]には次のような文章がある．

> 力学は電磁気学と並び，物理学の基礎ともいうべき学問であり，そのような見地から本書『力学・解析力学』がこのシリーズのトップ・バッターとなった．トップ・バッターがクリーン・ヒットを飛ばすか，凡退するかはシリーズの行方を左右する．そのような意味で著者に課せられた責任は重大である．

あれから十数年経ったが，2007年6月現在，同書は第11版を数え，著者の責任は何とか果たされたように思われる．

2. 科学雑誌の変遷

本誌の存在を知ったのはいつであったろうか，古い記憶の糸を辿っていくと1968年（昭和43年）に開かれた統計力学の国際会議に突き当たる．この会議をもとに，本誌では1969年8月に統計力学の特集号[2]が発刊され，「統計力学を論じて生命現象に及ぶ」という趣旨の座談会が開催された．富山小太郎（早大教授・理工学部），斎藤信彦（早大教授・理工学部），久保亮五（東大教授・理学部），佐藤洋（電通大教授・電通学部），阿部竜蔵（東大教授・教養学部）が出席され，戸田盛和（東京教育大教授・理学部）が司会者であった．括弧内は当時の現職を表している．この頃，本誌の発行所

はダイヤモンド社で，その後，現在のサイエンス社へと移行した．私の名前は龍蔵だが，龍の字は漢字制限にひっかかるとの理由で当時は竜の字を使っていた．私の日記には当日の状況が次のように記載されている．1969年5月9日（金）晴「夕方から，教養学部を出て，ダイヤモンド社に行き，統計力学の座談会に出席．戸田，久保，富山，斎藤，佐藤，阿部といったメンバーで，僕が一番若かったので，あまり発言はしなかった．それでも4, 500円もらったので悪いような気がする．」

上例は誌名が変わらず，発行者が変わった数少ない例だと思うが，70年以上も人間をやっていると，多くの科学雑誌の変遷が見られる．このような変遷中には現在の企画と密接に関係している箇所があるので，簡単に一瞥しておこう．私が小学校4年のときと思うが母が近くの映画館に連れていってくれた．今のようなテレビはなく，自宅から徒歩10分の地域内に4, 5軒の映画館があり，これらは娯楽の中心であった．当日観た映画はSFで，題目や主演俳優は全く覚えていない．しかし，その中の一場面は65年を経た後でも鮮明に記憶している．地球がぐるぐる回る画面が出され，そこを目がけてある種の物体が落下していく．落下地点はアフリカの中央で落下物体を探しに捜索隊が組織されるといったストーリーであった．この頃「科学画報」という雑誌がありこの映画のコメントが掲載されていた．

小学校高学年の頃，「科学と模型」という雑誌を購読していた．1939年9月に第二次世界大戦が勃発し，1941年にドイツ戦艦ビスマルクが英国戦艦フッドを撃沈するという戦果を上げた．上記雑誌を自宅で受け取り，歯医者にもっていって上のニュースを読んだのを今でも記憶している．この雑誌は数年間購読していたが，ある号でラジオのパワートランスを改造して2〜10Vの電源を提供できる変圧器を自作する記事が掲載されていた．時代は小学校から中学校へと進み2年生の半ばで勤労動員に駆り出された頃で，お国のため鉄や銅を供出しなければならなかった．母に頼み知り合いの電気屋からパワートランスを入手した．鉄しんの鉄板を一枚一枚はがし，コイルだけにしさらに2次コイルを全部除去して1次コイルだけを残した．この時点でどれくらい磁場が生じるか実験したくなり，そのコイルを100Vの電源につないだ．とたんにショートしてヒューズが飛んでしまった．その当時なぜこんな事件が起こったのか，原因はさっぱりわからなかった．数年後，高校の物理で，鉄しんがあるときとないときとではコイルに流れる電流がまるで違うのを学び，謎が解消した．

上記の実験では1次コイルを電源でショートしたようなもので，瞬間的に大電流のためコイルは強力な磁石へと変身した．1960年代になり，強磁場を発生させるのに今と同じような方法があるのを知り驚いたことがある．すなわち，コイルに大電流を流し，コイルそのものは焼き切れてしまうが，その寸前に発生する強力な磁場を利用して物性を測定するという趣旨のものである．サイエンス社で電磁気学の本を書くときには，パワートランスの改造の際に経験したことを生かし，問題などを作っている．実際に自分で体験したことは容易に忘れることはなく，まさに「百聞は一見に如かず」の通りである．

以上述べた例以外に「科学朝日」「科学読売」「自然」「物性」「固体物理」「金属物理」「科学」「ニュートン」「ウータン」などの科学雑誌が思い浮かぶ．これらのうちには廃刊したものもあれば，現在でも活躍中のものもある．いずれにせよ，我が国の科学水準を高めた雑誌として高く評価されるべきであろう．科学の興亡に従い科学雑誌の運命も決まるのであろうが，それにしても携帯電話などに費用をかける最近の風潮にはあまり感心できない．

3. 5年におよぶ避暑生活

私は1930年（昭和5年）に生まれた．昭和12年4月に小学校に入学したとたん日支事変が勃発した．小学3年にはドイツのポーランド進攻，小学5年には真珠湾奇襲と私の小学校時代は戦時色一色であった．ナチスドイツの電撃作戦の影響を受けてか，この頃「科学する心」という言葉が流行り，小学校の教育でもグライダーや飛行機の模型

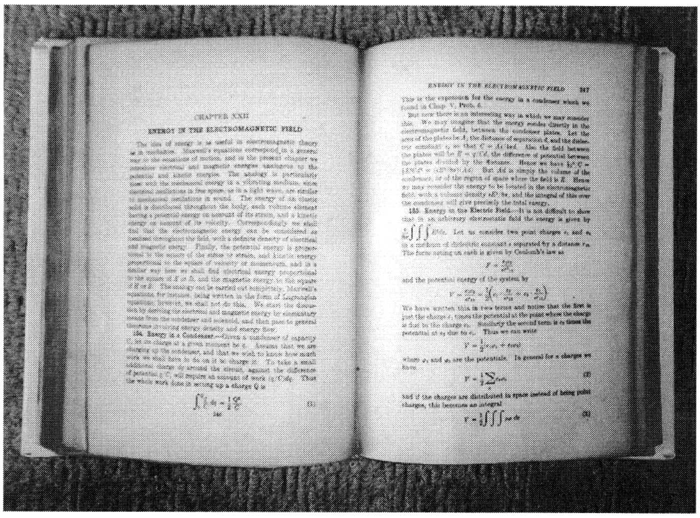
の製作が正規の授業の中にとり入れられたりした．

小学校の同級生の大部分は「いなか」があり何らかの意味で自然に接触していた．東京生まれ，東京育ちの私にとりそのような機会はあまりなかった．その点を心配した両親は夏休みを利用して避暑に行かせてくれたが，今から思うとその経験は私が物理を目指す動機を提供したと言えるだろう．小学校時代1年から5年まで夏休みには千葉県の保田という所に避暑に出かけていた．小学校6年になると，当時始まった戦争の影響もあり保田は要塞地帯になるとのことで，避暑はまかりならぬという事態になり，やむを得ず茅ヶ崎に避暑に出かけた．戸田盛和先生（現東京教育大学名誉教授）は放送大学で私の先輩教授にあたるが，戸田格子（格子点の間に非線形な力が働くような1種のモデル）の構想を練られたのは保田での避暑中とのことであった．保田で見た星空の美しさは今でも強く印象に残っている．記憶に残っている限り，私は小学校1年の時点において保田で生まれて初めて天の川を見た．現在ほどひどくないが，60年前の東京の夜空は光害のため明るく，天の川を見るのはほとんど不可能であった．母の弟で当時学生であった叔父は星や天の川のことを研究するのは天文学だと教えてくれた．そこで，早速，父に原田三夫著『子供の天文学』という本を買ってもらった．現在，この本は私の手元にないが，これほど面白いと思った本はその後めったにお目にかかることはなかった．難しい漢字にはルビがついていたので，小学校低学年の学力でも結構読みこなせた．柔らかな頭にはすべてが新しく，わかるわからないは別として書いてあることをどんどん吸収していった．科学者としての原点はその辺にあったのもしれない．

話は少々変わるが，高村光太郎（1883–1956）の詩集「智恵子抄」の中に「智恵子は東京に空が無いといふ／ほんとの空が見たいといふ／私は驚いて空を見る」という一節がある．智恵子とは高村光太郎の妻高村智恵子のことで，彼女は昭和10年，精神病のため南品川のゼームス坂病院に入院し，昭和13年に死去した．ゼームス坂病院は大正11年に開業した精神科の病院であるが，昭和17年にこの病院は閉鎖された．戦後，ゼームス坂病院は東芝大井病院として復活した．この病院は私と少なからぬ縁がある．すなわち，1955年11月16日に，私は肺結核のためこの病院に入院した．それから10カ月ほど入院し，ストレプトマイン，ヒドラジッド，パスという3種の薬の化学療法を受けて1956年9月11日に退院した．入院中，この病院の前身が精神科であることを知ったが，人の噂では長く入院していると様子が変になると言われたものである．その後，1964年，この病院は東芝中央病院と名前を変え現在地（東大井）に移動した．1957年，1967年の2度にわたり「智恵子抄」が映画化された．高村智恵子の役を前者では原節子，後者では岩下志麻が演じた．いずれの映画でも私の入院した病院でロケが行われたとのことである．残念ながら私はこれらの映画を見ていない．

高村智恵子がゼームス坂病院に入院した頃，私は5歳で東京に本当の空があったかどうかはよく覚えていない．当時の自宅から南品川まで歩いて15分程度の距離で，両者は同じ所にあったと思ってよい．その頃すでに光害のため夜の空は明るくこのため東京では天の川は見えなかった．保田で東京とは全く違う星空の美しさに感激したものである．『智恵子抄』でいう「東京に空がない」という言葉は天の川も見えない汚い空という意味であるが，その理由は次の通りであろう．南品川は京浜工業地帯に属し多くの工場があった．工場から排出される汚染物質はスモッグとなり太陽の光をさえぎり，このため「抜けるような青空」は実現しなかった．「東京に空がない」というのはこの種の状況を指すものと思われる．

最近，タクシーの運転手さんから息子さんが自衛隊の仕事でイランに行って来たという話を聞いた．イランには光害はなく星はよく見えるとのことであった．これと関連して戦時中の思い出が一つある．終戦から1年ほど前，私は中学校2年生であった．昭和19年6月にサイパン島が陥落し，東京上空にはB29が飛来してきた．昭和20年3



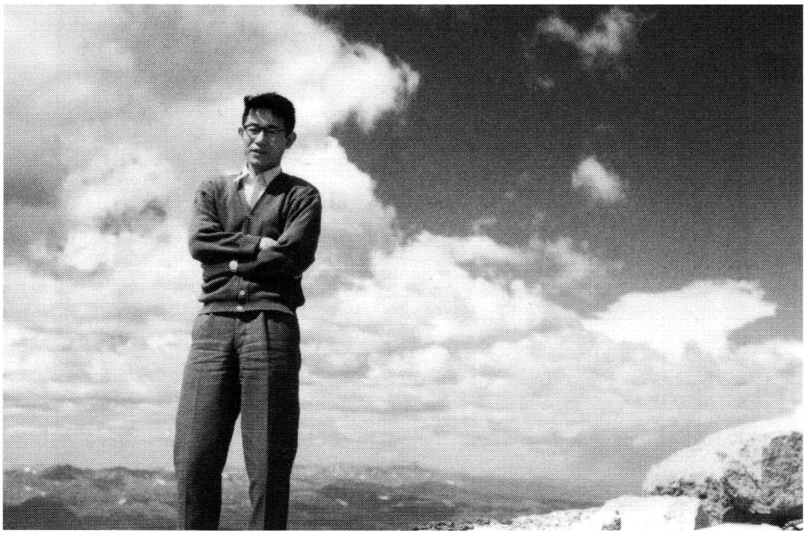
月10日の東京大空襲の前，偵察のため帝都上空にB29がよく現れた．敵機が来るというとき空襲警報のサイレンが鳴る．偵察のとき，敵機は1機でやってきたが，灯火管制のため，世の中真っ暗である．快晴で月の出ない夜は満天の星のもと，敵機は探照灯に照らされながら悠々と帝都の空を飛んでいったが，その情景を見た者は現在ではほとんどいないであろう．5節で満天の星について再び言及したい．

4. 理論物理学との出会い

小学校，中学校を通じて私は科学が好きであった．もっとも科学と言っても実験のほうで理論はあまり得意ではなかった．昭和22年に第一高等学校に入学した．4修という制度のお陰で旧制の高等学校に滑り込んだわけである．ちなみに私の世代は旧制度の教育を受けた最後で，一学年下の人たちは新制度の教育を受けることになった．高校2年のとき金沢秀夫先生に物理を習った．先生の講義は迫力にあふれ，数式が次から次へと黒板に並びノートをとるのが精一杯であった．今でも強く印象に残っているのは波動方程式の話を聞いたときのことである．

中学生の頃には波は伝わるのが当たり前で，まさかそれが数式で記述されるとは夢想だにしなかった．ところが，金沢先生の授業で波の伝わりが偏微分方程式で表されるのを学び，何か見事なマジックを見ているようですっかり感激してしまった．また先生はSlater & Frank著“Introduction to Theoretical Physics”という本をテキストにして理論物理学のセミナーを開いてくださった．ガリ版のコピーを使って勉強したが，これも大変面白かった．物理の内容はともかく英語はやさしく辞書なしでもすらすら読めるのは嬉しかった．金沢先生のゼミは最初の数章で終わってしまったが，神田の古本屋で上記の本を買い求め，独力で何とか最後まで読み上げた（写真参考）．こうして，私は理論物理学へと大きく傾斜していった．

これから2, 30年たって私は大学院の委員を行っていた．私は1966年（昭和41年）に東大駒場の教養学部に行きそこでの教授を25年間ほど務めた．大学院は相関理化学課程と呼ばれ私の記憶では2回大学院の委員をしたことがある．当時の記録を調べれば正確な日付はわかるかもしれないが，日付は大きな問題にはならないので2, 30年前というアバウトな表現にしておく．当時の委員長は西島和彦先生である．ある日，物理の博士過程の学生に関して委員会で次のような相談を受けた．当時の規定では理学博士を修得するのに教育期間の制限がある．すなわち，小学校6年，中学校3年，高等学校3年，大学4年，修士課程2年，博士課程3年で計21年である．しかし，中国では



1960 年夏，コロラド山脈にて.

文化大革命のためこの期間が厳密には守れないから，何とか考えてほしいという話であった．話の筋からわかるように，理学博士の修得希望者は中国からの留学生であった．この委員会の委員は戦時中多かれ少なかれ勤労動員で 1, 2 年学業の中断を経験したことがあるため，この提案は可とされた．その後法律が変わり，上のような制限は多少緩んだと理解している．

5. 星の見えない空

1959 年（昭和 34 年）から 1961 年（昭和 36 年）までの 2 年間，米国のノースウェスタン大学で研究員を務めた．当時，私は東京工業大学の助手であったが，ノースウェスタン大学には東京工業大学，物理の同僚が数名いた．同大学はエバンストン市に属し，これはシカゴ郊外の人口 7, 8 万の小さな市で，シカゴ・エバンストン間の距離は東京・横浜間とほぼ同程度である．現在，横浜港に係留してある氷川丸はその頃現役で，これに乗り約 2 週間ほどかかってはるばる太平洋を越えていった．日本はその頃高度成長の前で我々は成長の先取りという感じで生活していた．何しろアメリカは大きな国なので，日本にいるとなかなか経験できないような事件にいくつか遭遇した．この記事の趣旨と合うような話をいくつか以下に紹介しよう．氷川丸がアメリカ本土のシアトル港に到着する前夜，興奮のためか寝付かれず寝所を抜け出しデッキを散策していた．周囲には人口的な灯火がなく，戦時中の灯火管制のようで月も出ず満天の星を楽しむことができた．

1960 年の夏，当時ノースウェスタン大学におられた会津夫妻とカナダ，アメリカ旅行を計画した（写真参照）．その帰途，私たちはコロラド州からネブラスカ州に出て，8 月 12 日にオマハで一泊した．オマハに到着する前，日が暮れ暗いハイウエーをドライブしたが，ヘッドライトの光をめがけて無数の蛾が飛来する．これらの蛾が前のガラス窓にぶつかり，その残骸が視界を遮るのでワイパーを回すほどであった．広大なアメリカの大地には自然がいっぱい残っているという感じであった．滞米中，私の住んでいるところから，ドライブで 30 分くらい離れたところに来ると，星空がよく見え天の川も認識できた．その頃すでにアメリカは成熟した文明国で 40 年たった現在でも事情はあまり変わらないと思う．1997 年の「京都議定書」には各国の二酸化炭素の削減目標が決められている．わが国では 2002 年 6 月にこれを批准した．ところがエネルギーの最大消費国である肝心のアメリカはまだこの議定書を批准してない．多分その裏には上述のような事情があるのだろう．

これに対し，日本では1960年から2000年までの40年間にエネルギー消費量は5倍程度となり急激な発展を遂げた．私たちは少々せっかちすぎたような気がする．この辺で少々ペースを落とすのがよいのではあるまいか．

渡米する前にフランク・永井の「羽田発七時五十分」という歌が流行した．この歌は星の見えない空を寂しく眺めていたが，待っていた人と会えないで羽田空港を出発する男の哀愁を歌ったものである．当時は羽田発の最終の飛行機便は7時50分であることが伺え興味深い．しかし，ここでの主題は逆の「星の見える空」ということになる．

1603年（慶長8年），徳川家康は江戸幕府を開いた．2003年（平成15年）はそれから400年にあたるので様々なイベントが行われた．例えば，江戸開府400年というタイトルで何種類かの記念切手が発行された．400年という年月は宇宙のスケールで見ればほんの一瞬に過ぎないかもしれない．しかし，これは人間のスケールで言えば十数代の世代にわたるかなり長い時間である．この400年の間に政治，経済，文化など様々のものが大きく変化した．400年前だと主な移動手段は徒歩でカゴや馬がその補助として使われたのであろう．現在では，自動車，電車が使われ，場合によっては上記のような飛行機も利用される．

子供の頃と街の景観も一変した．特に，1960年代の後半から東京は大きな変貌をとげ六本木ヒルズ，汐留，品川駅付近などには超高層ビルが建設されている．東京以外の都市でも同じことで日本の各地に超高層ビルができた．地震がきたらどうなるか心配だが，専門家の話では実際は起きてみなければわからないとのことである．もちろん，現在の超高層ビルはそれなりに設計してあると思うが，理論と実験とが食い違うことはしばしば起こり得る．設計を信じて楽天的になるか，杞憂（きゆう）状態におちいり悲観的になるかは個人の自由というべきであろう．

文明の発達に伴い自然は失われていった．400年前，江戸の空は現在よりはるかにきれいで月のない晴天であれば天の川は頭上に輝いていたことであろう．現在の夜空を見上げてもせいぜい3等星が見える程度で本来なら観測できるはずの天の川は全く見えない．物理学は言うまでもなく自然を相手とする学問であるが，本来なら見えるはずの物が見えないという現状はどういうものだろう．人工衛星から日本列島を見ると，列島の海岸線がはっきりわかるくらい光の帯がつながっているという話である．このような状態では都会の近くで天の川を観測することができないのも当然と言える．

真夜中に一歩戸外に出るとまぶしいくらいの照明があるのに気づく．3節で述べたように，戦時中，空襲の警戒警報が出ると，灯火管制の状況で東京の空は真っ暗となり，大空は満天の星でおおわれた．最近，夏至の夜，東京タワーや近傍のビルはライトアップを中止し少しでも暗い空を実現するようにしている．また，国立天文台のある三鷹市では光害防止指導指針を制定したという話である．年に1回くらい，月のない快晴の日を選び，緊急的な灯火は別として，東京の街灯を全面的に消灯したらどうであろうか．美しい星空に感動して将来，物理学者になろうという人が現れるかもしれないし，二酸化炭素の削減にも多少の寄与はあると期待される．「歩行者天国」は自動車に奪われていた道路を人間が取り戻す一つの運動であった．これと同じように近代文明に奪われた自然を取り戻す「星空天国」があってもよいかと思う．2005年はアインシュタインが特殊相対性理論，光量子説，ブラウン運動の3つの論文を発表してからちょうど100年にあたる．これを記念してWorld Year of Physics（略してWYP）2005が設けられ，世界的にいろいろなイベントが行われた．日本物理学会でもWYPを機に公募があったが，上記の「星空天国」の提案は2004年2月10日の日付で当時の日本物理学会副会長の和達三樹氏に送ったものである．

参考文献

1)　阿部龍蔵：『力学・解析力学』岩波書店 (1994).
2)　数理科学 No.**74** ダイヤモンド社 (1969).

（あべ・りゅうぞう，東京大学名誉教授）

リレー連載 ネットワーク科学最前線 —世界の“つながり”を知る科学と思考— 最終回

ささやかな幻滅と大きな期待

滝　順一

筆者は自然科学者でも社会科学者でもない．科学を取材し記事を書く新聞記者である．従って，ここに書いたのは門外漢がまさに門の外から，せいぜい玄関口あたりから覗いた「ネットワーク科学の最前線」である．科学とはあまり縁のない一般の読者と科学者の間の立ち位置から，両者の橋渡し役を買って出ている，自称「一般市民代表」の視点から，この分野がどう見えるのかの報告である．

1. ネットワークの科学へのときめき

スティーブン・ストロガッツが著書[1]でこんなエピソードを紹介している．

高校の科学の授業でストップウォッチとおもちゃの振り子を与えられた．振り子は腕の長さが可変で，腕の長さと振動周期の関係を実測するのが課題だった．腕の長さを変えて測った周期をグラフ用紙にプロットしていく途中で，若きストロガッツはグラフの形が代数学の授業で習った放物線を形作りつつあることに気がついた．

「私は驚きと恐怖とが入り混じったような感情に襲われてしまった．啓示にも似たその瞬間に私は，数学を通じてでしか垣間見ることのできない，『隠れた美しい世界』の存在に気づくようになったのである」．

本業の科学者がおそらくそうであるのと同様に，科学者でない人間にとっても科学の魔力は「隠れた美しい世界」への気づきにある．「美しい」か，どうかは別にしても，世界の背後に「隠されたからくり」を知ることが科学研究に触れることの喜びである．

筆者の場合，一例を挙げれば，「プレートテクトニクス」がそうだった．大陸と海洋の形成，造山運動や火山活動，地震の発生などをマントル対流による地殻の動きから説明し尽くしてしまう仮説に初めて触れたとき，地球物理学に強いあこがれを感じた．やはり高校生だったように思う．今，科学記者をやっている原点は多分，そんなところにある．

ネットワークの科学にも同じ魅力がある．2004年に邦訳が出たダンカン・ワッツの著書[2]は，「コンピュータやエイズのウィルス感染拡大，ハリー・ポッターのヒットなど文化の流行，情報ネットワーク，人間関係……あらゆる出来事の背後には『スモールワールド現象』がある」と帯紙にあるように，世界の背後にあるからくりをネットワークという切り口で切ってみせた．

何の共通性もなくかけ離れてみえる自然現象や社会現象の背後に共通して存在する数理的な構造を浮き上がらせる強力な「説明力」のようなもの

がネットワークの科学の魅力であるとともに，登場のタイミングもいかにも時宜を得ていた．

2000年以降，ウェブ閲覧やショッピング，電子メールの利用が急速に普及し，様々な同時にネットワーク犯罪が新聞紙面をにぎわすようになっていた．通信ネットワークというものの便利さと危険性について，身をもって知り始めた時期にあたる．また2001年の9.11同時多発テロでは，国家vsテロリストネットワークの戦争という図式が解説され，重症急性呼吸器症候群（SARS）が香港と世界を結ぶ空のネットワークで感染を広げ世界を揺さぶったのは2003年である．

2005年3月に「ネットワーク生態学研究会」なる組織が誕生したのも，こうした社会状況と無縁ではないだろう．旗揚げの中心にいた上林憲行（東京工科大学）と林幸雄（北陸先端科学技術大学院大学）の2人に同年5月にインタビューした．

お2人の話も，現実の複雑なネットワークが共通した構造（スケールフリー性）をもち，そうしたネットワークの生成原理には普遍性があることがわかったことを強調されていた．

そして，ネットワーク生態学の研究が目的とする応用として，① センサネットや携帯電話におけるアドホック通信の適応制御，自律分散システム（ロボット），② 社会システムや生物系の長所を模倣した，ウィルスの拡散防止（免疫化）対策，③ カスケード故障の防止策：電力崩壊，渋滞，連鎖倒産，④ 企業組織内や企業間，ワールド・ワイド・ウェブ（WWW）コミュニティなど社会ネットワーク分析：オピニオンリーダーの抽出，情報や技術の普及促進，効果的な宣伝戦略――が挙げられた．

また話を伺う中で興味をそそられたのは，この新しい発展が統計物理や計算機科学の研究者が中心になってもたらされたという点だ．文理融合の新しい研究分野ということになる．

ネット社会の誕生ということの裏返しの指摘になるが，これまで可視化・データ化することが難しかった人間関係とか，人と人とのコミュニケーションの形が通信ネットワークの普及を介して測定可能なものとなった．

また，計算機の能力向上で，非常に多数のリンクをもつ複雑なネットワークを「複雑なまま」分析の対象とすることができるようになったと言えるのではないか．

社会科学の側が受けたインパクトは，安田雪（東京大学ものづくり経営研究センター）が組織学会の学会誌[3]に紹介した第26回サンベルト，国際ネットワーク分析会議（2006年4月）の報告に生々しい．

「参加者もセッションも増加し，網羅する領域も幅広くなった．規模の拡大のみならず，報告内容が多岐にわたり，ネットワーク分析の学術的ルーツである構造社会学や数理社会学の枠組みどころか，組織論や経営学の領域にもとらわれることがない．社会科学系と理工系の研究者が切磋琢磨する，ネットワークサイエンスとも言うべき，学際的な分野が誕生しつつあることを実感した」．

こう会議の熱気を伝えた上で，「この10年間にネットワーク分析に生じた最も大きな変化は，ネットワークが比喩的概念から，より厳密な意味での分析概念に変化したことだろう．メタファーでしかなかった『ネットワーク』が，より具体的に計測できる概念になったのだ．この変化は，数理社会学者らの努力に加え，理工系研究者の参入によるところが大きい」と，現状認識をまとめている．

2. 情勢は「複雑系の科学」と似ているのか？

「科学の革命」「新思考の科学」．科学記者の関心を呼ばずにはおかないテーマがそこにあったが，すぐに思い出されたのは数年前に経験した「複雑系の科学」のブームのことだ．

あのときも「面白いものにめぐり合った」と思ったが，いざ取材を始めてみると，一筋縄でいかないことがわかってきた．「複雑系の科学」がいかなるものかという考え方の紹介はできても，それで何が新たにわかったと言えるのかを改めて問い直すと，具体的で読者に説明可能な内容が見つからないのだ．

複雑系もブームのきっかけは，1996年に邦訳が

出た米サイエンス誌記者のM・ミッチェル・ワールドロップの著書[4]からだ．

「ソ連の崩壊から株価の暴落まで」と当時の書評に紹介されたように，これまた森羅万象の背後にある共通則を明らかにする「新しい科学」と吹聴され，「複雑系」という言葉が独り歩きするような風潮すら生み出した．

少しわき道にそれるかもしれないが，今読み返しても面白いので，独り歩きの例を紹介すると，例えば産経新聞のコラム「釣然草」の長辻象平の記事[5]がある．長辻は産経新聞の科学記者にして時代小説作家という異能の人である．

長辻が東京湾にマダコ釣りに出かけたが，釣り船で１日がんばって１匹を釣り上げたのが精一杯の不漁．雨が多いからとか，タンカー事故があったからとか，いろいろと不漁の原因を詮索したあげく，こう書く．

「生物界では，多様な種が環境条件だけでなく，食物連鎖などを通じて相互に影響を及ぼし合っている．まさしく流行中の『複雑系』の世界である．東京湾のマダコも『カオスの縁』に身を置いているのかもしれない」．

もう一例．警察が捜査に複雑系の科学を応用していると称する毎日新聞の記事[6]．

兵庫県警がひったくりの行動パターンを分析，8割が現場から左折して逃走していることがわかったため，警察官の配置を逃走方向の左側にしたところ，検挙率が４カ月間で６割アップしたという．

どこが複雑系？ と思うのだが，この記事を書いた記者は，『複雑系としての経済』などの著書がある埼玉大学経済学部教授の西山賢一にコメントを求め，記事の末尾に大真面目で載せている．

西山教授いわく「足裏の着地面積は左側がわずかに広かったり，体の重心が左に傾いているなど人間固有の身体特性に引き起こされた傾向と考えられる．ただ（複雑系の科学は）理論的には未解明な点も多い分野，注目すべきデータになる」．コメントを求められた教授は面食らったのではないかと想像される．

こんな調子だから，「複雑系」ブームはすぐさま有識者からお小言をいただく有様になる．東京大学社会科学研究所教授の西垣通は朝日新聞のコラム[7]で，「日本のサンタフェ研究所をつくろう」などという「空騒ぎは迷惑」と切って捨て，以下のように軽薄なブームを戒める．

「複雑系の科学には『21 世紀の科学革命』という賛辞が与えられようとしている．とはいえ，ここで確認しておこう．たしかに複雑系の科学は経済学や生物学など諸学に応用できる新しい数学モデルを生み出す可能性をもつ．だがそれは決して従来の諸学を一般的に統合するものではない．それは“統合”ではなく，むしろ個別の各学問分野への“追加”なのである」．

「複雑系の科学によって，自然から人事にいたる諸現象のほとんどが数学的に解明できるなどというのは，悪しき妄想にすぎない．機械で生命が合成できるといった，山師さながらの宣伝文句も同類である．妄想が大声をあげて複雑系の科学をリードしていけば，まともな研究者の努力は実を結ばないだろう」．

この分野の専門家が西垣の文章を現時点でどう評価するのかは知らないが，ともかくブームは終わった．

ただ，言葉は残った．「複雑系」という言葉は，日本語の語彙に入り，その由来や科学的意味を全く知らない人でも，単に物事が予測不能と思われるときに「複雑系だから」などと使うのを耳にしたり見かけたりする．

科学用語の一般語彙化は時折，見られることだ．例えば「不確定性原理」という言葉も，「科学の領域に限らず，欠陥のない知識を確立することの一般的な難しさを指す常套句になっている」[8]．それらはともあれ，耳に入りやすい言葉であり概念であったと言える．

ネットワークの科学はどうか？ 幸か不幸か，複雑系のようなブームにはこれまでのところはなっていない．啓蒙書としては東京大学の増田直紀[9]，北陸先端の林[10]らの出版などがあり，雑誌での特集もあったが，社会的なインパクトは複雑系には及ばない．

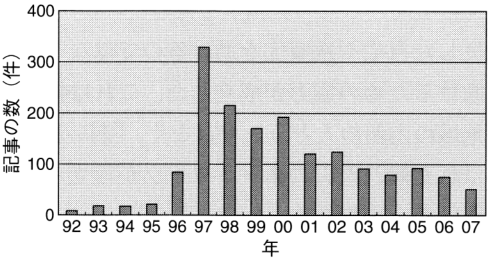


図 1　「複雑系」という言葉が登場する記事の数.

新聞記事のデータベース検索サービス「日経テレコン 21」で，日本の主要全国紙と地方紙の記事に「複雑系」という言葉を含むものを検索してみた．グラフ（図 1）にあるように，1996 年以降頻出し，現在は少なくなったとはいえ，95 年以前よりは多い．

しかし，「スモールワールド・ネットワーク」あるいは「スケールフリー・ネットワーク」で検索しても記事はほとんど出てこない．見つかるのは筆者自身が書いた少数の記事[11]だけである．

ここに来て気がつくのは，ネットワークの科学には人口に膾炙するような言葉，キャッチフレーズがないことだ．「小さい世界」「六次の隔たり」など，どうも印象が薄い．これに対し，長辻がマダコのコラムで使った「カオスの縁」などは，そもそもの科学的意味はどうあれ，ちょっと詩的な雰囲気すらある魅力的な言葉と言わざるを得ない．

言葉が独り歩きするのも困りものだが，社会的な関心を呼ぶ力に欠くというのもさみしい．時代相をみれば，まさにネットワーク社会が到来しているにも関わらずである．

3.「弱い紐帯」を探して

言葉の問題に少しこだわりすぎたかもしれない．キャッチフレーズの有無は科学研究にとっては本質的な問題ではないことは言うまでもない．

また，ネットワークの科学は複雑系の科学の流れをくむ側面を持つという歴史的な経緯を考えれば，両者を全く別個のものと扱って，社会へのインパクトを測ることは妥当でないという指摘もあるに違いない．

さらに，本連載第 8 回で，有田正規（東京大学）は「ここ数年の，異常ともいえる生体ネットワークのブーム」「話題性があればよいといった安易な解析が横行している」などと書いている．筆者のような門外漢には見えにくいところでそれなりの「ブーム」があり，複雑系のブームに対し西垣が指摘したような「空騒ぎ」が起きているのかもしれない．

同じ記事の中で有田は，生体ネットワーク解析の陥穽を指摘している．生体内で遺伝子やたんぱく質が形作るネットワークの真の姿についてまだ十分にわかっていないにも関わらず，研究者がネットワーク科学の手法で取扱い可能な範囲内でデータを解析して，とりあえず論文にしているとの指摘だ．そうした研究は生物学として「不毛」だとする．

同じく連載第 7 回でも，小林徹也（理化学研究所）らが「現実のネットワークを抽象化するプロセスにおいて，ある種の多義性が存在し，そのため現実的には同じネットワークであるにも関わらず，抽象化の方法に依存してネットワークの持つ特性が異なってくる，という現象が徐々に明らかになっている」としている．

こうした点はキャッチフレーズの有無とは比較にならないくらい重要な指摘であり，前節で指摘した科学記者の懸念と軌を一にする．

それで新たに何がわかったと言えるのか？ その結論から果たして何が説明できているのか？ 取材時にこうした質問を投げかけて納得のいく答えが返ってくることはそれほど多くはなかった．

個別の研究成果に言及するのは避けて，筆者自身のささやかな経験を紹介する．それは「弱い絆」探しの話だ．

2007 年 4 月に日経の別冊の編集部から依頼が舞い込んだ．科学をネタに何か肩の凝らない読み物は書けないかという話だ．そこで筆者はネットワークの科学を題材に選ぶことを提案してみた．企画案を練る中で，編集者が飛びついたのは「弱い絆の強さ」という言葉だった．普段は頼りにし

ていない，それほど大切とも思わない人間関係が，ある局面では重要な働きをする．「面白そうだから，実例を挙げてルポできないか」ということになり，「弱い紐帯」探しを始めることになった．

「弱い紐帯」は社会学者のマーク・グラノベッターが1973年に，転職先の情報をどこから得たのかという分析から創出した言葉だとされる．有益な転職情報は人的なネットワークがもたらされる．しかも普段から密接な付き合いをしていない人物からもたらされる傾向があるというのだ．

まず，最初に訪問したのは，ジョブ・マッチングについて詳しい渡辺深（上智大学）だ．1985年という早い時点で，グラノベッターと同様の，転職者を対象にした聞き取り調査を実施している．その結果は，確かに転職情報は人的ネットワークからもたらされるが，普段から付き合いが濃い「強い紐帯」を利用した転職のほうがうまくいく割合が多いというものだ[12)]．グラノベッターの主張とは相容れない．

渡辺は同じ目的の調査を2002年にも実施した，今度は結果が違った[13)]．「弱い紐帯」を利用した場合のほうが，転職後の年収が増加したり，より規模の大きな企業に転職できている傾向が，少なくとも東京の男性労働者については見つかったのだ．「失われた10年」などと呼ばれる長期不況のせいか，労働者のネットワークが身近な「内輪」のものどうしで情報を共有する「閉鎖型」から，多くの異なる他者との関係を取り結ぶ「開放型」へ転換していることの現れかもしれないと渡辺は分析している．

次に，社会学の立場からネットワークの科学に対し発言することの多い辻竜平（明治学院大学）を訪ねた．辻が新潟中越地震の被災地で人的ネットワークについて調査していることを以前の取材で知っていたからだ．

辻は同郷会の事例を挙げてくれた．中越地域から集団就職などで東京に働きに出た人たちは，東京で同郷会と呼ばれる親睦組織をもつという．かつてはともかく現在は，参加者が日常的に密な付き合いをもつ組織ではないが，震災にあたって被災世帯を助けるため義捐金を集めることができた．被災した自宅や親戚宅を助けるのではなく，地域を助けるための協力が成立した．これは接触が密な地域の内側の人どうしではなく，「弱い紐帯」で結ばれた離れた人のネットワークが役立ったのではないかとの指摘だ．

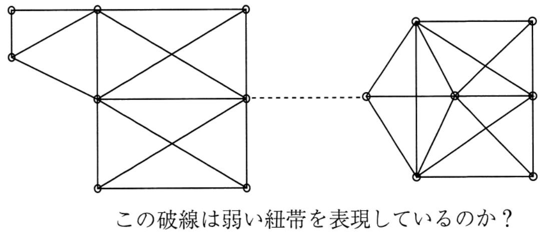
筆者はこうやって事例を集めていったわけだが，取材メモを読み返すうちに，疑問が湧いた．

それは，「弱い紐帯」をグラフで表現する場合，密にネットワークを形成した固まりどうしを結ぶ1本のブリッジのようなリンクと考えていいものだろうか？ というものだ（図2）．それまでそんなイメージを疑いもせずに頭に浮かべて取材にあたっていたのだが，突然違和感をもつようになった．

転職も助け合いのネットも「弱い紐帯の強さ」という文脈にあてはまる事例に思えるのだが，それをノードとリンクの形に抽象化するのが果たして妥当なのだろうか？ そんなネットワークの構造でそれらの事象を適切に説明できるのだろうか？ そう思い出したら，全く自信がなくなってしまった．後になって友知政樹（沖縄国際大学）の解説[14)]を読んで，グラノベッターの主張に対しては異論が出ていることを知った．

社会学でも有田が生体ネットワークで展開したのと同様の批判がある．

インタビュー時の辻の言葉を借りよう．「社会学と情報物理の感覚がずれている．ワッツらが社会学にもたらした功績は大きいが，社会学はネットワークに与えられた意味を抜きには語れない．次数分布を問題にする限りはいいかもしれないが，社会学で問題にしたいのはそれだけではない．社会学で重要であるためには分布がそうであるなら，



この破線は弱い紐帯を表現しているのか？

図2

社会的にどういう意味を持つのかだ」．辻はより詳細な批判を学会で展開している[15]．

4. それでも「ネットワークの科学」に期待

生命系，社会系の研究者からの批判はともに，物理・情報系から巻き起こったネットワークの科学の「狂騒」に対するものであり，科学としての価値そのものを否定しているのではないと受け取れる．門前の科学記者から見れば物足りない「騒ぎ」ではあるのだが，新しい研究領域の立ち上がりに伴うある種の混乱が収束すれば，本来備えている潜在力を発揮するようになるのではと期待する．少なくとも，多彩な分野の研究者が共通の関心と言語をもつようになることは重要だ．そのプロセスにおいて，前節で紹介した批判は健全なものではないかと思える．そこで以下は，期待論である．

まず情報系．

インターネットの構造を知ることへの期待は大きいように思う．インターネットは誰が設計するのでも，管理するのでもない自律的に成長するネットワークであり，その構造など知り得るものではないのかもしれない．しかし，社会がインターネットに依存する度合がこれほど高まっている状況から，それについて何も知らないという状態に甘んじているわけにはいかないだろう．また人工環境としてのネットの振舞いを調べ，その特性を知ることはアカデミックにも価値があることではないだろうか．

相馬亘（情報通信研究機構/ATR）らは，学術情報ネットワーク（サイネット）を対象にノードの通信量の変化からネットワーク構造の特性を類推する試みに挑戦している．あたかも聴診器や血圧計で健康状態を推し量るように，ネット全体の地図を描くようなことは困難にしても，その状態や特性を知る「診断技術」のようなものが必要だろう．

生命科学の世界は，2000 年のヒトゲノム解読の頃から，データ爆発の時代を迎えている．遺伝子，RNA，たんぱく質などの解析技術が進み，分子の相互作用のネットワークを描けるようになってきた．

理化学研究所でゲノム解析を率いてきた和田昭允が提唱した「オーミック・スペース」は，ゲノム（遺伝子領域），トランスクリプトーム（転写産物領域），プロテオーム（たんぱく質領域），メタボローム（代謝領域），フェノーム（表現型領域）の階層構造を想定し，層内での分子間相互作用に加えて，層間の相互作用ネットワークを調べることにより，最終的に生命の機能を分子レベルで総合的に理解しようとする試みだ．

分子生物学の一つの到達目標を明確にした雄大な構想と言える．こうした巨大なネットワーク構造の理解にネットワークの科学の知識や手法は不可欠なものに思える．試行錯誤はあろうが，情報系と生命系の研究者の連携が期待される．

また，最近「ロングテール・ドラッグ」という新しい概念[16]が提唱されていることを知った．現在開発されている分子標的薬と呼ばれる薬は例えば，がん細胞がもつたんぱく質のネットワークの要の位置を占める分子，つまりハブを標的として設計されているが，ロングテール・ドラッグはそうではなく，ネットワークで言えば次数の少ない多数のたんぱく質をターゲットにする．

実用化のメドが現時点であるわけではなく，細胞レベルでの基礎研究の段階のようだが，非常に多くの因子を低レベルでの相互作用でターゲットにする．単独では影響の少ない分子を多数相手にして，それらのシナジーでがん細胞だけに選択的な効果を与えることを狙うという発想．影響力の大きいハブを狙わないのは，影響力が大きいだけに副作用も重篤になりやすいと考えるからだ．無論，実現するには，がん細胞には効果的でありながら正常細胞には副作用を及ぼさない複数因子の合成効果というものが存在し，それを発見することが欠かせない．

こうしたアイデアが登場する背景には，ネットワークの科学があってこそであり，実現に近づけるには，やはり情報系と生命系の協力なしでは難しい．

社会系の研究は，企業間取引や国際関係の分析，感染症対策，マーケティングへの応用など多岐にわたる．

本連載第13回で，湯田聴夫（情報通信研究機構/ATR）が紹介しているSNSの分析は情報系と社会系が結びつき具体的な成果を生み出しやすい注目度の高い分野だ．

湯田は高密度にリンクし合ったノードの集団（コミュニティ）を高速に抽出する研究に取り組んでいる．SNS運営企業の協力を得て100万を超えるノードがある規模の大きなネットワークでコミュニティ抽出が可能になっているという．SNSなどで同じコミュニティに属する人たちは話題や関心を共有すると考えられる．

湯田はこの構造分析の手法を，情報探索者にカスタマイズした情報提供システム（情報ソムリエ）の構築に利用することを提案している[17]．ソムリエとは「客の相談を受けてワインを選定・提供する専門職」のことだが，情報検索者の属するコミュニティを知ることによって，検索者の嗜好や履歴を加味した上での情報提供サービスが可能になるかもしれない．

こうした考え方は，総務省の情報フロンティア研究会（座長：國領二郎）が昨年7月に公表した報告書[18]にもあり，新しいマーケティング手法として期待されるところが大きいのだろう．

ただ，ネットで検索・抽出される個人データを使うマーケティングにはリスクも潜む．エール大学経済学者のイアン・エアーズは著書[19]で，アマゾンが消費者を怒らせた事例を紹介している．アマゾンが顧客の購入履歴などを参考にDVDのオンライン販売の提示価格を操作していた疑いが表面化したのだ．購入者の属性によって価格などが操作されることはアメリカ社会に存在し批判の対象になり得る．エアーズは人種によって自動車ディーラーが値引き率を変えている実態を調べた．

邦訳にはこうある．

「顧客は，同じ商品が別価格で提供されているのを知ると怒ることもある．2000年9月に報道されたことだが，ある人が自分のコンピュータのクッキー（これはその人がアマゾン・コムの常連だということを示す）を削除したら，DVDの標示価格が26.24ドルから22.74ドルに下がったという．多くの顧客は突然，アマゾンがインターネットに細工をしているのではないかと不安になりだした．同社はすぐに謝って，その価格差は無作為の価格テストの結果だと述べた．CEOジェフ・ベゾスははっきりと述べた．『顧客の属性に基づいた価格テストはしたことがありませんし，これからもしません』と」．

安田（東京大学）と鳥山正博（野村総合研究所）は電子メールログから企業内のコミュニケーション構造の抽出を試みている[20]．若林直樹（京都大学）によると，企業内でのコミュニケーションの円滑さをチェックするコミュニケーション監査がすでに米国企業で普及し始めているという．プロジェクトの確実な達成を期するため，あるいは企業の不祥事や不正を防止する目的で，社内のコミュニケーションを客観的に把握することが必要だと考えられているからだ．

安田は前掲の国際会議報告[3]で，社会科学におけるネットワーク分析の倫理的・法的問題についての議論も紹介している．同時多発テロ事件の犯人逮捕にネットワーク分析が用いられたなどの事実を踏まえ，強力になり過ぎた分析手法への警戒感が強いという．日本国内とは認識に大きな隔たりがあると思わざるを得ない．組織や個人を対象にする場合，「ネットワーク分析が被爆の危険がある『レントゲン』だという自覚を持ち，実践を続ける他はない．対象への細心の注意と配慮が不可欠である」と安田は主張する．同感である．

×　　　×　　　×

話を伺った研究者の方々の敬称を省くのは抵抗感があるが，敬称略にさせていただいた．

参考文献

1) スティーブン・ストロガッツ，長尾力訳：『SYNC—なぜ自然はシンクロしたがるのか』早川書房，2005.
2) ダンカン・ワッツ，辻竜平ら訳：『スモールワールド・ネットワーク—世界を知るための新科学的思考法』阪急コミュニケーションズ，2004.

3) 安田雪：「ネットワーク分析をめぐる海外の動向—連鎖し拡大する研究領域」組織科学，Vol.**40**, 2007.3.

4) M・ミッチェル・ワールドロップ：『複雑系』新潮社，1996.

5) 長辻象平：「釣然草，複雑系のマダコ釣り」産経新聞 1997 年 11 月 15 日夕刊.

6) 「ひったくりは左へ曲がる!? 兵庫県警が分析，重点配備—検挙率，6 割アップ」毎日新聞 1997 年 9 月 29 日夕刊（中部版）.

7) 西垣通：「科学をよむ，複雑系はカオス理論—空騒ぎは研究者に迷惑」朝日新聞 1996 年 12 月 12 日夕刊.

8) デイヴィッド・リンドリー：『そして世界に不確定性がもたらされた—ハイゼンベルクの物理学革命』早川書房，2007.

9) 増田直紀：『私たちはどうつながっているのか—ネットワークの科学を応用する』中央公論新社，2007.

10) 林幸雄：『噂の拡がり方—ネットワーク科学で世界を読み解く』化学同人，2007.

11) 滝順一：「科学で迫るネットワーク」日経産業新聞 2005 年 12 月 19–21 日.

12) 渡辺深：「ジョブマッチング—情報とネットワーク」日本労働研究雑誌第 **495** 号 2001 年 10 月号.

13) 渡辺深：「就職と転職におけるネットワークの効果」日本労働研究機構資料シリーズ No.**137**, 2003.

14) 山田一成，北村英哉，結城雅樹編著『よくわかる社会心理学』ミネルヴァ書房，2007.

15) 辻竜平：「ネットワークにおける形式と意味の狭間で」，第 43 回数理社会学会，2007.

16) 北野宏明，竹内薫：『したたかな生命』ダイヤモンド社，2007.

17) 湯田聴夫：「人の複雑ネットワークと情報ソムリエ—コミュニティ抽出法の可能性」日本ロボット学会誌 **26** 巻 1 号，2008 年 1 月.

18) 総務省・情報フロンティア研究会：「情報フロンティア研究会報告書—個と個の連携を通じて知識創造プロセスの進化がもたらされる社会を目指して」2007 年 6 月.

19) イアン・エアーズ：『その数学が戦略を決める』文芸春秋，2007.

20) 安田雪，鳥山正博：「電子メールログからの企業内コミュニケーション構造の抽出」組織科学 Vol.**40** No3, 2007.

（たき・じゅんいち，日本経済新聞社）

特　集（2008年6月号予告）

線形代数の力
その歴史から多彩な応用まで

線形代数小史	齋藤　正彦
線形空間とは何か	高橋　大輔
固有値問題とは何か	桂　利行
線形代数と平面幾何	砂田　利一
線形代数から表現論へ	平井　武
線形代数と微分方程式	真島　秀行
線形代数と関数解析学	河東　泰之
物理学と線形代数	荒木不二洋
［コラム］数理工学と線形代数	岩田　覚
［コラム］行列雑話	山本　哲朗
［コラム］制御理論と線形代数	木村　英紀
［インタビュー］	齋藤　正彦
《名著に親しむ》	高山　信毅

本体952円

編集後記

今回は“難所”をテーマに組んでみましたが如何でしたでしょうか．ぶつかる壁は十人十色ですが，先生方の記事や対談にあるように，難所を積極的に捉えて，それが新たな出発点となることを期待します．また，本号から新連載「物理の道しるべ」が始まりました．数学編は次号からです．これも志ある人への良き道案内となることを願っています．　（伊崎）

数　理　科　学　5月号

2008年5月1日発行　　発行人　木　下　敏　孝

数理科学編集部
TEL. (03) 5474-8816
FAX. (03) 5474-8817

編集スタッフ
平勢耕介　伊崎修通
大溝良平

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所　©　株式会社 サイエンス社　TEL. (03) 5474-8500（代表）
〒151-0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷1-3-25　振替 00170-7-2387　(03) 5474-8600（広告部）

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁